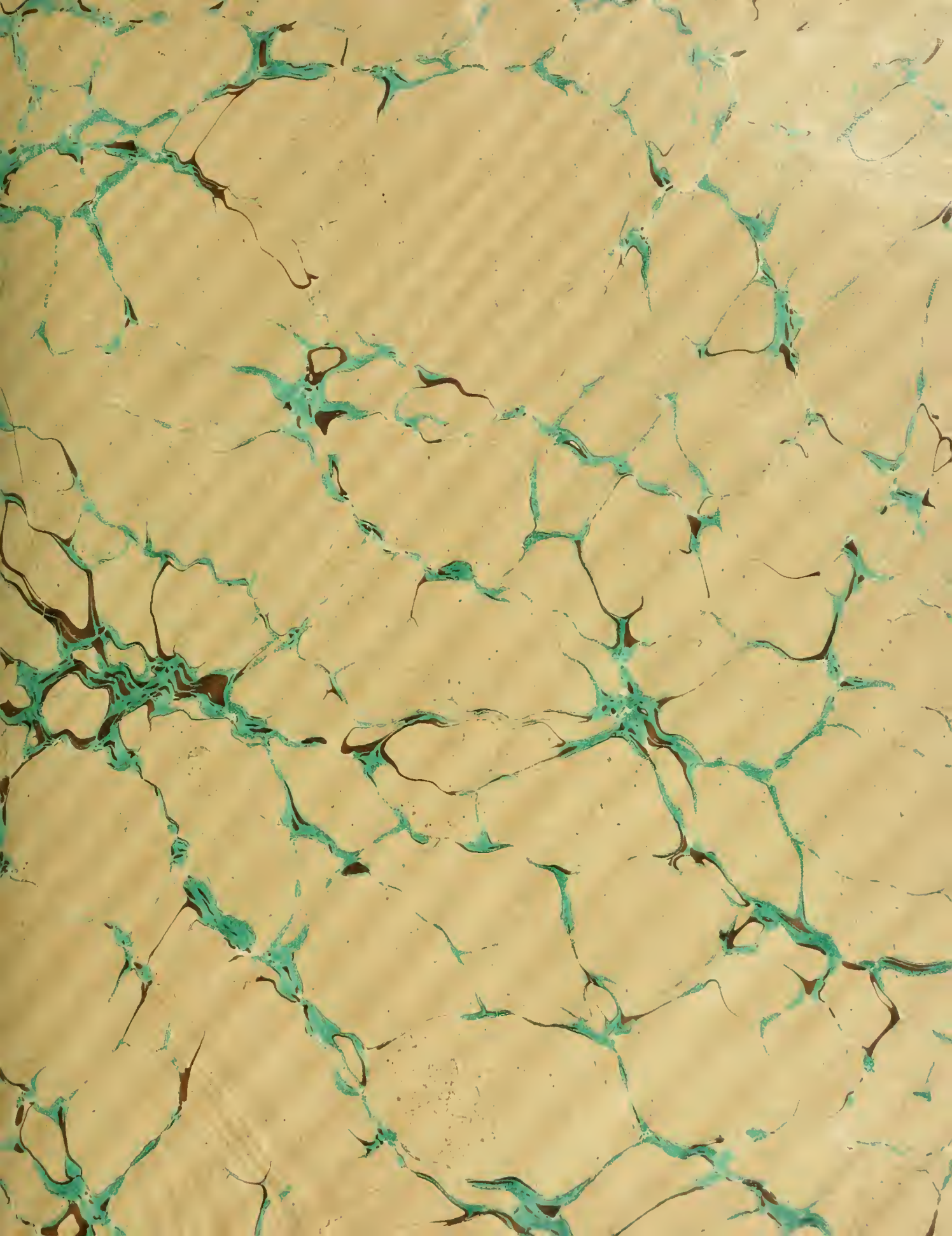


Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2journaldemat02liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME II. — ANNÉE 1857.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, n° 55.

1857

QH
1
J684
sér. 2
t. 2

20778
c

TABLE DES MATIÈRES,

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME II.

Pages.

Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré; par M. *Tchebichef*. 1

Sur quelques intégrales elliptiques; par M. *O. Schlömilch*. 43

Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$. — Extrait d'une Lettre de M. *O. Schlömilch*. — Extrait d'une Lettre de M. *A. Cayley*. — Remarques de M. *Liouville*. 47

Théorème concernant les sommes de diviseurs des nombres; par M. *J. Liouville*. 56

Sur une nouvelle formule pour la détermination de la densité d'une couche sphérique infiniment mince, quand la valeur du potentiel de cette couche est donnée en chaque point de la surface; par M. *Lejeune-Dirichlet*. (Traduit de l'allemand par M. *Jules Hoüel*). 57

Note sur l'attraction des paraboloïdes elliptiques; par M. *J. Bourget*. 81

Détermination du pentaèdre de volume donné, dont la surface est un minimum; par M. *C.-G. Sucksdorff*. 91

Sur l'expression $\varphi(n)$, qui marque combien la suite 1, 2, 3,..., n contient de nombres premiers à n; par M. *J. Liouville*. 110

Mémoire sur quelques-unes des formes les plus simples que puissent présenter les intégrales des équations différentielles du mouvement d'un point matériel; par M. *J. Bertrand*. 113

Sur quelques fonctions numériques; par M. *J. Liouville*. (Premier article). . . . 141

Des termes qui complètent la formule générale de la Mécanique analytique dans le cas du frottement; par M. *E. Brassinne*. 145

Démonstration de ce théorème : Tout nombre impair est la somme de quatre carrés dont deux sont égaux; par M. *V.-A. Lebesgue*. 149

Note sur la géométrie organique de Maclaurin, contenant diverses applications des théories de la géométrie moderne; par M. *E. de Jonquières*. 153

Sur la série de Lagrange; par M. *Tchebichef*. 166

Sur un théorème de M. Dirichlet; par M. *J. Liouville*. 184

Pages

Observations sur le Mémoire de M. Housel, intitulé : Les Porismes d'Euclide; par M. *Breton (de Champ)*. 185
Réduction d'une intégrale multiple; par M. *O. Schlömilch*. 206
Sur une ligne géodésique de l'ellipsoïde; par M. *William Roberts*. 213
Éloge de Charles-Gustave-Jacob Jacobi; par M. *Lejeune-Dirichlet*. (Traduit de l'allemand par M. *Jules Hoüel*). 217
Sur quelques fonctions numériques; par M. *J. Liouville*. (Deuxième article). . . 244
Mémoire sur la théorie des pôles et polaires dans les courbes d'ordre quelconque, particulièrement dans les courbes du troisième et du quatrième ordre, comprenant diverses applications de cette théorie; par M. *E. de Jonquières*. 249
Note relative au § XX du Mémoire qui précède. Deuxième mode de description de la courbe du quatrième ordre déterminée par quatorze points; par M. *E. de Jonquières*. 267
Demonstration nouvelle d'une proposition relative à la théorie des formes quadratiques; par M. *Lejeune-Dirichlet*. 273
Sur le produit $m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)$; par M. *J. Liouville*. . . . 277
Sur l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}{(1+\sqrt{1+gx})^{2p+2q}}$; par M. *J. Liouville*. 279
Sur la fonction $E(x)$ qui marque le nombre entier contenu dans x; par M. *J. Liouville*. 280
Questions dynamiques. Sur la percussion des corps; par M. *Poinsot*. 281
Sur la décomposition d'un nombre en un produit de deux sommes de carrés; par M. *J. Liouville*. 351
Simplification de la théorie des formes binaires du second degré à déterminant positif; par M. *Lejeune-Dirichlet*. (Traduit de l'allemand par M. *Jules Hoüel*). . . 353
Addition à ce Mémoire; par l'*Auteur*. 373
Extrait d'une Lettre de M. *Dirichlet* à M. *Liouville*. 375
Sur quelques fonctions numériques; par M. *J. Liouville*. (Troisième article). . . 377
Sur le potentiel d'une couche infiniment mince comprise entre deux paraboloïdes elliptiques; par M. *T.-A. Hirst*. 385
Note sur une propriété d'un système de courbes planes; par M. *T.-A. Hirst*. . 392
Généralisation d'un théorème de l'arithmétique indienne; par M. *J. Liouville*. . . 393
Propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre; par M. *Chasles*. . 397
Sur une relation entre deux fonctions numériques; par M. *J. Liouville*. 408
Demonstration du théorème énoncé dans l'article précédent; par M. *J. Liouville*. 409
Sur un point de la théorie des équations binômes; par M. *J. Liouville*. 413
Note à l'occasion d'un Mémoire de M. Bouniakowsky; par M. *J. Liouville*. 424
Sur quelques fonctions numériques; par M. *J. Liouville*. (Quatrième article). . . 425
Sur quelques séries et produits infinis; par M. *J. Liouville*. 433

ERRATA.

Page	Ligne	
171	13	*au lieu de* $d^n i$, *lisez* di^n.
172	12	*au lieu de* $X = 0 = f\varphi(X)$, *lisez* $X - a = f\varphi(X)$.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR

L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES

QUI CONTIENNENT

UNE RACINE CARRÉE D'UN POLYNOME DU TROISIÈME OU DU QUATRIÈME DEGRÉ ;

PAR M. TCHEBICHEF.

Tiré des *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 6e série, Sciences mathématiques et physiques, tome VI.)

§ I.

Dans le Mémoire *sur l'intégration des différentielles irrationnelles*, publié en 1853 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, nous avons donné une méthode pour trouver la partie algébrique dans l'expression de l'intégrale $\int \frac{f_0 x}{F_0 x} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, en tant qu'elle est possible sous forme finie, et déterminer séparément tous les termes logarithmiques à l'aide de certaines conditions qu'ils doivent vérifier. A présent nous allons montrer comment on peut trouver, d'après ces conditions, les termes logarithmiques, dans le cas le plus simple et le plus intéressant, savoir : celui où la différentielle contient une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré. Faute de méthode générale, on ne connaît que des cas très-particuliers, où une

pareille différentielle s'intègre sous forme finie; dans plusieurs autres cas, pour lesquels cette intégration a aussi lieu, on n'y parvient qu'en essayant différentes transformations, et le plus souvent on renonce à l'idée de chercher l'intégrale après avoir fait beaucoup de tentatives sans succès. Or, d'après nos recherches citées plus haut, les méthodes particulières et les essais de différentes transformations qu'on emploie dans cette intégration seront remplacés par une méthode générale et directe dès qu'on sera parvenu à définir les termes logarithmiques dans la valeur de

$$\int \frac{f_0 x}{F_0 x} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda}},$$

d'après les conditions que nous avons trouvées pour leur détermination. C'est ce que nous allons faire ici, en donnant la méthode d'après laquelle la recherche de ces termes se réduit toujours à cette question résolue par Abel :

Trouver toutes les différentielles de la forme $\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, *où* ρ *et* R *sont des fonctions entières de* x, *dont les intégrales puissent s'exprimer par une formule de la forme*

$$\log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}.$$

(*OEuvres complètes*, tome I, page 33.)

Cette intégration sera donc due à Abel, et par le principe fondamental, d'où nous sommes partis dans nos recherches sur l'intégration des différentielles irrationnelles, et par la méthode de résoudre la question citée, à laquelle se réduit finalement la détermination des termes logarithmiques dans la valeur de

$$\int \frac{f_0 x}{F_0 x} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda}}.$$

Ainsi nos recherches, comme nous nous plaisons à le croire, rempliront, sous un certain rapport, une lacune qui restait entre les Mémoires de ce grand géomètre, où il donne la forme générale des intégrales des différentielles algébriques, en tant qu'elles sont possibles sous forme finie, et ceux où il cherche leur valeur, en faisant une hypothèse particulière.

La réduction de nos équations, dont nous venons de parler, est indispensable aussi pour simplifier l'intégration des différentielles plus compliquées. Quant aux différentielles qui ne contiennent sous le signe du radical carré qu'une fonction du premier ou du second degré, cette réduction conduit immédiatement à trouver la partie logarithmique de leurs intégrales. Outre cela, cette réduction est remarquable par différents résultats relatifs à la nature des intégrales qu'on peut en tirer, et cela nous fournit un rapprochement très-intéressant de la construction des valeurs irrationnelles avec la règle et le compas, et l'intégration des différentielles sous forme finie. Ainsi l'on verra que la somme des nombres n^0, n', n'',... étant impaire, l'intégrale

$$\left(n^0 x + \frac{n'\Delta(a')}{x-a'} + \frac{n''\Delta(a'')}{x-a''} + \ldots + \mathrm{C}\right)\frac{dx}{\Delta(x)},$$

où nous avons fait, pour abréger,

$$\Delta(x) = \sqrt{x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda},$$

ne peut être exprimée sous forme finie, si, d'après les quantités

$$a',\ a'',\ldots,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \lambda,$$

et à l'aide de la règle et du compas, on ne peut construire aucune des racines de l'équation

$$x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda = 0.$$

Par exemple, on reconnaît que les intégrales

$$\int \frac{x + \mathrm{C}}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 8x + 9}}\,dx,$$

$$\int \frac{n^0 x + \dfrac{3(2n' - n^0 - 1)}{x} + \mathrm{C}}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 8x + 9}}\,dx,$$

$$\int \frac{n^0 x + \dfrac{2n'}{x-1} + \dfrac{3(2n'' - n^0 - n' - 1)}{x} + \mathrm{C}}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 8x + 9}}\,dx,$$

. . . . . .

sont impossibles sous forme finie, parce que, à l'aide de la règle et du compas, on ne peut pas inscrire dans le cercle un polygone régulier de sept côtés, ce qui est nécessaire pour la construction des racines de l'équation

$$x^4 + 2x^2 - 8x + 9 = 0.$$

Il y a d'autres questions de l'analyse transcendante, où la même méthode de réduction peut être avantageusement employée, savoir quand on cherche à exprimer la somme des intégrales

$$\int^{x_1} \frac{f_0 x}{\alpha_1 x + \beta_1} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}} + \int^{x_{11}} \frac{f_0 x}{\alpha_1 x + \beta_1} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}} + \ldots,$$

par une somme d'un nombre déterminé d'intégrales semblables, en y ajoutant une certaine fonction algébrique et logarithmique.

Enfin, cette même méthode, appliquée aux nombres, donne un procédé à l'aide duquel on trouvera la représentation d'un nombre donné par la forme $x^2 - ny^2$ toutes les fois que ce nombre peut être mis sous cette forme, et qu'on connaît la valeur de x pour laquelle la forme $x^2 - n$ est divisible par ce nombre. Dans le cas de $n = -1$, cela se réduit à la méthode ingénieuse que M. Hermite a employée pour démontrer que tous les nombres premiers de la forme $4k + 1$ sont toujours décomposables en une somme de deux carrés, et pour effectuer en même temps cette décomposition.

§ II.

Si dans les formules de notre Mémoire cité plus haut on fait

$$m = 2, \qquad \Delta = \sqrt[m]{\theta x} = \sqrt{\theta x},$$

on trouve que l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

dont l'une des racines primitives nous a servi pour composer des nombres complexes, se réduit à

$$x^2 - 1 = 0,$$

et comme la racine primitive de cette équation est égale à -1, les nombres complexes que nous avons désignés par

$$M_i^0,\ M_i',\ M_i'',\ldots$$

deviennent réels et rationnels. De plus, la forme générale des termes logarithmiques

$$A \log[\varphi(\Delta).\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta).\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)],$$

à cause de $m=2$, $\Delta=\sqrt{\theta x}$, devient

$$A \log[\varphi(\sqrt{\theta x}).\varphi^{-1}(-\sqrt{\theta x})] = A \log\frac{\varphi(\sqrt{\theta x})}{\varphi(-\sqrt{\theta x})},$$

et comme φ est une fonction entière, on aura

$$\varphi(\sqrt{\theta x}) = X_0 + X\sqrt{\theta x},\qquad \varphi(-\sqrt{\theta x}) = X_0 - X\sqrt{\theta x},$$

où X_0, X sont des fonctions entières.

Donc, les termes logarithmiques, dans la valeur de l'intégrale $\int\frac{Fx}{fx}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, s'écriront ainsi :

$$A \log\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}.$$

En cherchant à déterminer ces termes, nous avons trouvé que le coefficient A sera égal à une valeur connue, divisée par un nombre entier inconnu, et si l'on désigne ce nombre par n_i, le degré de la fonction $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$ sera exprimé par le produit $n_i.M_i^0$, où M_i^0 est une valeur connue. De plus, cette fonction, pour toutes les valeurs finies de x, sera en rapport fini avec la puissance $n_i^{ième}$ de la fonction

$$(x-x')^{M_i'}.(x-x'')^{M_i''}.\ (x-x''')^{M_i'''}\ldots[x-x^{(\lambda-1)}]^{M_i^{\lambda-1}}[x-x^{(\lambda-1)}],$$

où

$$M_i',\ M_i'',\ M_i''',\ldots,\ M_i^{\lambda-1},$$

dans le cas que nous examinons, sont réels et rationnels. En passant

à la détermination des inconnus n_i, X_0, X, nous remarquons que n_i doit être susceptible de réduire les produits

$$n_i M_i^0,\ n_i M_i',\ n_i M_i'',\ n_i M_i''',\ n_i M_i^{\lambda-1}$$

à des nombres entiers; car le produit $n_i M_i^0$ désigne le degré de $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$, qui ne peut être fractionnaire, X_0, X étant des fonctions entières; la même chose a lieu relativement aux produits

$$n_i M_i',\ n_i M_i'',\ n_i M_i''',\ldots,\ n_i M_i^{\lambda-1},$$

qui sont égaux aux exposants de $x - x'$, $x - x''$, $x - x'''$, ..., $x - x^{(\lambda-1)}$ dans les premiers termes du développement de $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$ suivant les puissances croissantes de $x - x'$, $x - x''$, $x - x'''$, ..., $x - x^{(\lambda-1)}$. Donc, n_i doit être divisible par le plus petit dénominateur auquel les quantités

$$M_i^0,\ M_i',\ M_i'',\ldots,\ M_i^{\lambda-1}$$

peuvent être réduites, et par conséquent, si l'on désigne ce dénominateur par σ et le quotient $n_i : \sigma$ par $+\rho$ ou $-\rho$, on aura

$$n_i = \pm \rho\sigma,$$

où nous prendrons celui des deux signes qui appartient à la valeur de M_i^0. D'après cela, $n_i M_i^0$, le degré de $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$, sera exprimé par $\pm\sigma M_i^0 \rho$, où $\pm\sigma M_i^0$ se réduira à un nombre entier et positif. En dénotant ce nombre par π et désignant d'après la notation d'Abel le degré de $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$ par $\delta\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$, nous aurons, relativement à ρ, cette équation

$$\delta\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho.$$

Quant à la fonction qui, pour toutes les valeurs finies de x, reste

dans un rapport fini avec la fonction $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta.x}}{X_0 - X\sqrt{\theta.x}}$, en vertu de $n_i = \pm \rho\sigma$, elle se réduit à

$$\left[(x-x')^{M'_i}.(x-x'')^{M''_i}.(x-x''')^{M'''_i}\ldots[x-x^{(\lambda-1)}]^{M_i^{\lambda-1}}.[x-x^{(\lambda+i)}]\right]^{\pm\rho\sigma},$$

et comme les produits $\sigma M'_i$, $\sigma M''_i, \ldots,$ $\sigma M_i^{(\lambda-1)}$, d'après la propriété du nombre σ, se réduisent à des nombres entiers, la fonction

$$\left[(x-x')^{M'_i}.(x-x'')^{M''_i}.(x-x''')^{M'''_i}\ldots[x-x^{(\lambda-1)}]^{M_i^{\lambda-1}}.[x-x^{(\lambda+i)}]\right]^{\pm\sigma}.$$

ne peut être que rationnelle. Donc, si nous faisons, pour abréger,

$$\left[(x-x')^{M'_i}.(x-x'')^{M''_i}.(x-x''')^{M'''_i}\ldots[x-x^{(\lambda-1)}]^{M_i^{\lambda-1}}.(x-x_{(\lambda+i)})\right]^{\pm\sigma} = \frac{u}{v}.$$

où u, v sont des fonctions entières, et que nous convenions de désigner par la lettre T toutes les fonctions qui restent finies tant que x n'est pas infini, la propriété de la fonction $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta.x}}{X_0 - X\sqrt{\theta.x}}$ en question sera exprimée par cette équation

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta.x}}{X_0 - X\sqrt{\theta.x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}.$$

C'est d'après cette équation, combinée avec la suivante :

$$\delta\,\frac{X_0 + X\sqrt{\theta.x}}{X_0 - X\sqrt{\theta.x}} = \pi\rho,$$

que nous devons chercher le nombre ρ et les fonctions X_0 et X.

Ces équations seront le plus souvent très-compliquées à cause du degré élevé des fonctions u et v, et de la valeur considérable de π. Or nous allons montrer qu'on peut les réduire à la forme, où le degré de uv, plus le nombre π, sera au-dessous du degré de $\sqrt{\theta.x}$.

§ III.

Il n'est pas difficile de s'assurer que, θ_1, θ_2 étant deux fonctions entières dont le produit est égal à θx, et p et q des fonctions entieres quelconques, on peut mettre la fonction cherchée $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$ sous la forme

$$\left(\frac{p\sqrt{\theta_1} + p\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - p\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho \frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}},$$

en choisissant convenablement les fonctions entières P_0 et Q_0. En effet, le quotient

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} : \left(\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho$$

se réduit à

$$\frac{(X_0 + X\sqrt{\theta x})(p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2})^\rho}{(X_0 - X\sqrt{\theta x})(p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2})^\rho} = \frac{(X_0 + X\sqrt{\theta x})(p\theta_1 - q\sqrt{\theta x})^\rho}{(X_0 - X\sqrt{\theta x})(p\theta_1 + q\sqrt{\theta x})^\rho}.$$

expression qu'on peut mettre sous la forme $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}}$, en dénotant par P_0 la partie rationnelle du produit $(X_0 + X\sqrt{\theta x})(p\theta_1 - q\sqrt{\theta x})^\rho$, et par $Q_0\sqrt{\theta x}$ celle qui a pour facteur $\sqrt{\theta x}$.

Mais, si l'on substitue dans les équations

$$(1) \qquad \frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^\rho, \qquad \rho\,\frac{X^0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho$$

le produit $\left(\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho \frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}}$ à la place de $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$, elles se réduisent à celles-ci :

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\cdot\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho,$$

$$\delta\,\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = \left(\pi - \delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}\right)\rho,$$

et si les fonctions p et q sont choisies de manière à ce qu'elles vérifient les équations

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}} = \mathrm{T}\,\frac{u}{v}\cdot\frac{v'}{u'}, \qquad \delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}} = \pi_1,$$

les équations qui déterminent les nouvelles inconnues P_0 et Q_0 deviennent

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{P}_0+\mathrm{Q}_0\sqrt{\theta.x}}{\mathrm{P}_0-\mathrm{Q}_0\sqrt{\theta.x}} = \mathrm{T}\left(\frac{u'}{v'}\right)^{\rho}, \qquad \delta\,\frac{\mathrm{P}_0+\mathrm{Q}_0\sqrt{\theta.x}}{\mathrm{P}_0-\mathrm{Q}_0\sqrt{\theta.x}} = (\pi-\pi_1)\rho.$$

Ces équations seront plus ou moins simples selon les valeurs de p et q, qu'on emploiera dans la réduction dont nous venons de parler. Or nous allons montrer que, dans les équations réduites (2), la somme du degré de $u'v'$ et de la valeur numérique de $\pi-\pi_1$ sera au-dessous du degré de $\sqrt{\theta x}$, si l'on prend pour p et q les fonctions qu'on trouve de la manière suivante :

1°. On cherche une fonction entière S pour laquelle les fractions $\frac{\mathrm{S}\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\theta_2}}{u}$, $\frac{\mathrm{S}\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_2}}{v}$ ne deviennent pas infinies, tant que x reste fini.

2°. On développe $\frac{\mathrm{S}-\frac{\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{\theta_1}}}{uv}$ en fraction continue, et parmi les fractions réduites on trouve une fraction dont le dénominateur est d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta.x}}}$, mais qui est suivie d'une fraction dont le dénominateur est d'un degré plus élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta.x}}}$.

3°. En dénotant cette fraction par $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, on prend

$$(3) \qquad q = \mathrm{N}, \qquad p = \mathrm{SN} - \mathrm{M}uv.$$

En effet, d'après les équations (3) et la propriété de la fonction S,

on voit que les expressions

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}$$

ne deviennent infinies pour les valeurs finies de x. Donc, si l'on dénote par

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \beta,\ \beta_1,\ \beta_2, \ldots,$$

les valeurs de x qui rendent ces expressions égales à zéro, et par

$$f,\ f_1,\ f_2, \ldots,\ g,\ g_1,\ g_2, \ldots$$

les exposants de

$$x-\alpha, \quad x-\alpha_1, \quad x-\alpha_2, \ldots,$$

$$x-\beta, \quad x-\beta_1, \quad x-\beta_2, \ldots$$

dans leur développement suivant les puissances croissantes de ces différences, on aura

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u} = \mathrm{T}_1(x-\alpha)^f(x-\alpha_1)^{f_1}(x-\alpha_2)^{f_2}\ldots,$$

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v} = \mathrm{T}_2(x-\beta)^g(x-\beta_1)^{g_1}(x-\beta_2)^{g_2}\ldots,$$

où T_1, T_2 désignent des fonctions qui restent finies pour toutes les valeurs finies de x.

Mais, comme les exposants de $x-\alpha$, $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2, \ldots$, $x-\beta$, $x-\beta_1$, $x-\beta_2, \ldots$ dans le développement de $\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}$, $\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}$ ne peuvent contenir d'autres fractions que $\frac{1}{2}$, ces équations se réduiront à cette forme

$$(4) \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u} = \mathrm{T}_1 v'\sqrt{w}, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v} = \mathrm{T}_2 u'\sqrt{w'},$$

où u', v', w, w' sont des fonctions entières, dont les deux dernières ne contiennent que des facteurs simples. Par la multiplication de ces

équations nous trouvons

$$\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta}{uv} = T_1 T_2 u' v' \sqrt{ww'},$$

et, par conséquent,

$$\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uvu'v'\sqrt{ww'}} = T_1 T_2.$$

Cette équation prouve évidemment que $T_1 T_2$ est une constante; car, d'après la propriété des fonctions T_1, T_2, leur produit ne devient ni zéro ni infini pour x fini, tandis que cette équation montre que le carré de $T_1 T_2$ est une fraction rationnelle $\frac{(p^2\theta_1 - q^2\theta_2)^2}{(uvu'v')^2 ww'}$ qui ne peut rester finie pour toutes les valeurs finies de x, à moins qu'elle ne se réduise à une constante. Donc

$$T_1 T_2 = C,$$

et, par conséquent, l'équation précédente devient

$$(5) \qquad \frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uvu'v'\sqrt{ww'}} = C.$$

Or cette égalité suppose que ww' est un carré parfait, et comme les fonctions w, w' n'ont que des facteurs simples, cela ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$(6) \qquad w = w'.$$

D'après cela, en divisant les équations (4) l'une par l'autre, on trouve

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}} = T\frac{u}{v}\cdot\frac{v'}{u'},$$

en mettant, pour abréger, T à la place de $\frac{T_1}{T_2}$.

Il nous reste maintenant à prouver que si l'on fait

$$\pi_1 = \delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}},$$

la somme de $\delta(u'v')$ avec la valeur numérique de $\pi - \pi_1$ sera au-dessous de $\delta\sqrt{\theta x}$. Or, selon que $\pi - \pi_1$ est positif ou négatif, cette somme sera égale à

$$\delta(u'v') + \pi - \pi_1 \qquad \text{ou à} \qquad \delta(u'v') - \pi + \pi_1.$$

Nous allons montrer que ces deux quantités sont effectivement plus petites que $\delta\sqrt{\theta x}$, tant que p et q sont déterminés comme nous l'avons dit.

Pour s'en assurer, nous remarquons que, d'après la substitution de δx^{π} et $\delta\dfrac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}$ à la place de π et π_1, ces quantités deviennent

$$\delta(u'v') + \delta\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}x^{\pi}, \qquad \delta(u'v') + \delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}x^{-\pi}.$$

Mais, d'après l'équation (5), nous trouvons

$$\delta(u'v') \overset{=}{<} \delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv}.$$

Donc, les quantités précédentes sont égales ou inférieures à celles-ci :

$$\delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} + \delta\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}x^{\pi} = 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}},$$

$$\delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} + \delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}x^{-\pi} = 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Mais la première de ces quantités, par la substitution des valeurs de p et q d'après (3), devient

$$2\delta\frac{(\mathrm{SN} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} - \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}} = \delta\sqrt{\theta x} + 2\delta\left(\frac{\mathrm{S} - \sqrt{\dfrac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv} - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\right)\mathrm{N}\sqrt{\frac{uv\theta_1 \ldots x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}},$$

quantité qui est au-dessous de $\delta\sqrt{\theta x}$, tant que $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, dans la série des

fractions réduites de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$, est suivie par une fraction dont le dénominateur est d'un degré plus élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta . x}}}$. Quant à la seconde quantité, nous remarquons qu'elle peut être mise sous cette forme

$$2\partial\left[\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{-\frac{\pi}{2}}\right],$$

et, par conséquent, qu'elle ne surpasse pas au moins l'une de ces deux valeurs

$$2\partial\left[\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{-\frac{\pi}{2}}\right] = 2\partial\left[\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{\frac{\pi}{2}}\right] - 2\pi,$$

$$2\partial\frac{q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{-\frac{\pi}{2}} = \partial\sqrt{\theta x} - 2\partial \cdot \frac{1}{q}\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta . x}}}.$$

Mais comme nous venons de trouver que $2\partial\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}} x^{\frac{\pi}{2}}$ est plus petit que $\partial\sqrt{\theta x}$, et que nous avons pris $q = N$ d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta . x}}}$, il s'ensuit que ces deux quantités sont au-dessous de $\partial\sqrt{\theta x}$. Ainsi l'on parvient à s'assurer que les valeurs de p et q, déterminées d'après la méthode énoncée, sont effectivement susceptibles par la substitution

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta . x}}{X_0 - X\sqrt{\theta . x}} = \left(\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}\right)^{\rho} \frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta . x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}},$$

de réduire les équations

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta . x}}{X_0 - X\sqrt{\theta . x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}, \qquad \partial\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta . x}} = \pi\rho,$$

à ces autres

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u'}{v'}\right)^{\rho}, \qquad \delta\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi - \pi_1)\rho.$$

où la somme du degré de $u'v'$, plus la valeur numérique de $\pi - \pi_1$, est au-dessous du degré de $\sqrt{\theta x}$.

Nous montrerons maintenant que cette réduction sera toujours possible, tant que les équations primitives elles-mêmes ne remplissent pas la condition

$$\delta(uv) + \pi < \delta\sqrt{\theta x}.$$

Il est facile de remarquer que la détermination de p et q, dont nous venons de parler, ne suppose que l'existence de deux fractions réduites de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ telles, que l'une ait pour dénominateur une fonction d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$, tandis que la suivante a le dénominateur d'un degré plus élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$.

Or nous verrons que cela aura toujours lieu, tant que la condition $\delta(uv) + \pi < \delta\sqrt{\theta x}$ n'est pas remplie, et que l'on décompose convenablement la fonction θx en deux facteurs $\theta_1 . \theta_2$, savoir, de manière que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$ soit d'un degré fractionnaire. En effet, dans ces suppositions, le degré de $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$ est au-dessus de zéro, et, par conséquent, si l'on commence la série des fractions réduites de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta}}}{uv}$ par $\frac{0}{1}$, où le dénominateur est du degré zéro, on est sûr de trouver parmi elles au moins une fraction dont le dénominateur soit d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta}}}$.

Mais alors, dans la série infinie des fractions réduites de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{\sqrt{uv}}$, on trouvera nécessairement deux fractions consécutives telles, que l'une a pour dénominateur une fonction d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta . x}}}$, tandis que le dénominateur de l'autre est d'un degré plus élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$, si toutefois aucune des fractions réduites de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ n'a son dénominateur du même degré que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta . x}}}$. Or cela n'aura pas lieu, tant que cette fonction est d'un degré fractionnaire; car, pour θx de degré pair, toutes les fractions réduites de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv} = \frac{S - \frac{\theta_2}{\sqrt{\theta . x}}}{uv}$ ne contiennent que les puissances entières de x, et pour θx de degré impair, le degré de $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta . x}}}$ a la forme $k \pm \frac{1}{4}$, tandis que les degrés fractionnaires de x, dans la fonction $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$, sont de la forme $k + \frac{1}{2}$.

Nous remarquerons encore que, dans la série des fractions réduites de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv} = \frac{S - \frac{\theta_2}{\sqrt{\theta . x}}}{uv}$, on ne rencontrera des puissances fractionnaires de x qu'après la fraction $\frac{M}{N}$, qui sert pour trouver les fonctions p et q. En effet, les puissances fractionnaires de x ne peuvent y entrer que dans le cas où θx est de degré impair. Mais alors toutes les fonctions de la forme $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta . x}}{X_0 - X\sqrt{\theta . x}}$ sont évidemment du degré o. et par conséquent $\pi = o$. Or, π étant égal à zéro, d'après ce que nous venons de dire sur la détermination de p et q, le dénominateur N sera d'un degré moins

élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1}{\sqrt{\theta x}}}$, et avec un tel dénominateur la fraction réduite ne donne, en général, la fonction, d'où elle résulte par le développement en fraction continue, qu'avec une exactitude jusqu'aux quantités de l'ordre plus élevé que $\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{uv\theta_1}{\sqrt{\theta x}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{\theta x}}{\theta_1}\frac{1}{uv} = \frac{1}{uv}\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}$. Mais la partie irrationnelle de $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ est justement de cet ordre.

Donc, dans ce cas, cette partie n'a aucune influence sur la fraction $\frac{M}{N}$, de manière qu'on peut la supprimer dans la formule $\frac{S - \sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$, et chercher $\frac{M}{N}$ par le développement seulement de $\frac{S}{uv}$ en fraction continue.

§ IV.

Nous allons montrer maintenant le parti que l'on peut tirer de la réduction, qui vient d'être exposée, pour la solution des équations

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}, \qquad \delta\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho,$$

dans le cas, où θx est du troisième ou du quatrième degré. Après avoir trouvé les fonctions p et q, comme nous l'avons dit, et si l'on fait

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \left(\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}\right)^{\rho}\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}},$$

on parvient à ces équations

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u'}{v'}\right)^{\rho}, \qquad \delta\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi - \pi_1)\rho.$$

Pour trouver la fonction $\frac{u'}{v'}$, on divisera $p^2\theta_1 - q^2\theta_2$ par uv. D'après la méthode qui nous a servi pour trouver les fonctions p et q, il est clair que le quotient de cette division sera d'un degré moins élevé que $\sqrt{\theta x}$, et par conséquent, dans le cas de θx du troisième ou du quatrième degré, ce quotient sera, en général, représenté par $ax + b$. Mais, d'après les équations (5) et (6), ce quotient, à un facteur constant près, est égal à $u'v'w$. Donc, l'une des trois fonctions

$$u', \quad v', \quad w$$

sera égale à $ax + b$, et les autres se réduiront à des constantes, et par conséquent on sera conduit à l'un de ces trois cas :

$$\frac{u'}{v'} = \frac{1}{ax+b}, \qquad \frac{u'}{v'} = ax + b, \qquad \frac{u'}{v'} = \text{const.}$$

Mais en faisant $x = -\frac{b}{a}$ dans les équations (4), où d'après l'équation (6) $w' = w$, on voit que le premier cas aura lieu, si cette valeur de x rend

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0,$$

le second, si l'on a

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0,$$

et enfin le troisième, si pour $x = -\frac{b}{a}$ on trouve en même temps

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0.$$

Donc, si nous convenons de désigner par ε une valeur qui se réduit à

$$+1, \quad -1, \quad 0,$$

selon que pour $x = -\frac{b}{a}$ on trouve

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0,$$

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0,$$

ou, en même temps,

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0,$$

la valeur de $\frac{u'}{v'}$ sera donnée par cette équation

$$\frac{u'}{v'} = \frac{1}{(ax+b)^{\varepsilon}}.$$

D'après cela, les équations qui déterminent P_0, Q_0 et ρ deviennent

$$(7) \qquad \frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = \frac{T}{(ax+b)^{\varepsilon\rho}}, \qquad \partial\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi - \pi_1)\rho.$$

Dans le cas où a ne se réduit pas à zéro, on peut mettre ces équations sous une forme plus simple, en introduisant à la place de x une nouvelle variable z d'après l'équation

$$ax + b = \frac{a}{z}.$$

En effet, si l'on traite la valeur de $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}}$ comme fonction de cette nouvelle variable, on parvient facilement à reconnaître que, d'après les équations précédentes, la fonction $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}}$ en z sera déterminée par ces propriétés :

1°. Elle reste finie tant que z est fini et diffère de 0 ; car ces valeurs de z correspondent à celles de x différentes de $-\frac{b}{a}$ et finies.

2°. Pour $z = 0$, la limite du rapport $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} : z^{(\pi_1 - \pi)\rho}$ reste finie; car ce rapport n'est lui-même que la limite de la valeur de $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} : x^{(\pi - \pi_1)\rho}$ pour $x = \infty$.

3°. Pour $z = \infty$, le rapport $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} : z^{\varepsilon\rho}$ reste fini; car ce rapport est égal à $\frac{T}{a^{\varepsilon\rho}}$, quand on fait $x = -\frac{b}{a}$.

Donc, en faisant $ax + b = \frac{a}{z}$, on peut remplacer les équations (7) par celles-ci :

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}} = T z^{(\pi_1 - \pi)\rho}, \qquad \delta\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}} = \varepsilon\rho.$$

Mais il n'est pas difficile de s'assurer que a étant différent de zéro, on aura

$$\pi = \pi_1.$$

En effet, comme $\pi_1 = \delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}$, on peut mettre les différences $\pi - \pi_1$, $\pi_1 - \pi$ sous ces formes :

$$\delta\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}x^{\pi} = 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}} - \delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv},$$

$$\delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}x^{-\pi} = 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}} - \delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv}.$$

Donc, si le coefficient a dans la valeur de $\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} = ax + b$ n'est pas égal à zéro, les différences

$$\pi - \pi_1, \qquad \pi_1 - \pi$$

sont respectivement égales à

$$2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}}-1,\qquad 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}-1.$$

Mais, d'après le § III, on a

$$2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}}<\delta\sqrt{\theta x},\qquad 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}<\delta\sqrt{\theta x},$$

et comme θx n'est que du quatrième ou du troisième degré, cela prouve que les différences $\pi-\pi_1$, $\pi_1-\pi$ sont au-dessous de 1, ce qui ne peut être, à moins qu'on n'ait $\pi=\pi_1$. D'après cela, les équations qui déterminent P_0 et Q_0 en fonctions de z deviennent

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=T,\qquad \delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=\varepsilon\rho,$$

formules que nous mettrons sous la forme

$$(8)\quad \frac{P_0z^2+Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0z^2-Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=T,\qquad \delta\frac{P_0z^2+Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0z^2-Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=\varepsilon\rho,$$

pour délivrer la fonction radicale des puissances négatives de z.

Or la première de ces équations ne diffère que par la forme de celle qu'Abel a traitée dans son Mémoire *sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$, R *et* ρ *étant des fonctions entières*, et d'après les recherches ingénieuses de ce grand géomètre, nous savons que cette équation est impossible, sauf le cas de $P_0=0$ ou $Q_0=0$, si la fraction continue résultante de $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ n'est pas périodique, et dans

le cas contraire, si l'on a

$$\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)} = r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \ddots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \ddots}}}}}}},$$

on vérifiera cette équation en prenant

$$\frac{P_0 z^2}{Q_0} = r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \ddots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1}}}}.$$

Quant à l'équation

$$\delta\,\frac{P_0 z^2 + Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}} = \varepsilon\rho,$$

on la vérifiera en choisissant convenablement ρ, savoir en prenant

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon}\,\delta\,\frac{P_0 z^2 + Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}} = \frac{1}{\varepsilon}\,\delta\,\frac{\frac{P_0 z^2}{Q_0} + \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{\frac{P_0 z^2}{Q_0} - \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}.$$

Donc si l'on fait, pour abréger,

$$\varphi(z) = r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \ddots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1}}}},$$

la valeur cherchée de $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}}$ en fonction de z sera

$$\frac{\varphi(z) + \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{\varphi(z) - \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}},$$

et, d'après l'équation $ax + b = \frac{a}{z}$, nous aurons en fonction de x

$$(9)\qquad \frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = \frac{\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \varphi\left(\frac{a}{ax+b}\right) + \sqrt{\theta x}}{\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \varphi\left(\frac{a}{ax+b}\right) - \sqrt{\theta x}}.$$

Quant au nombre ρ, on le trouvera d'après l'équation

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon}\,\delta\,\frac{\varphi(z) + \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{\varphi(z) - \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}.$$

Cette valeur de ρ nous montre que la solution des équations (8), que nous venons de trouver, ne peut être employée que dans le cas où ε ne se réduit pas à zéro; car, pour $\varepsilon = 0$, cette valeur de ρ devient infinie, tandis que ρ désigne chez nous un nombre fini. Mais, dans ce cas, on vérifiera évidemment nos équations par une valeur finie de ρ, en prenant une des solutions de l'équation

$$\frac{P_0 z^2 + Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}} = T,$$

que nous avons exclues, savoir $Q_0 = 0$ ou $P_0 = 0$, ce qui donne

$$\frac{P_0 z^2 + Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}} = \pm 1, \quad \delta\,\frac{P_0 z^2 + Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}} = \varepsilon\rho = 0.$$

Dans ces solutions, pour $\varepsilon = 0$, le nombre ρ reste arbitraire, et l'on pourra prendre $\rho = 1$. Remarquons que ces solutions, qu'on pouvait aussi tirer de la formule (9) en prenant $\varphi(z)$ égale à 0 ou ∞, ne pourront être employées, à leur tour, que dans le cas de $\varepsilon = 0$; car autrement ρ serait égal à 0, tandis que ce nombre doit être différent de zéro.

Ainsi l'on trouve la fonction $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}}$ et le nombre ρ, si le quotient de la division de $p^2\theta_1 - q^2\theta_2$ par uv se réduit à $ax + b$ et que a ne soit pas égal à zéro. Mais s'il arrive que $a = 0$, les fonctions u', v', d'après ce que nous venons de dire relativement à leur détermination, se réduisent à des constantes, et, par conséquent, les équations qui déterminent P_0, Q_0 et ρ deviennent

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = T, \qquad \partial\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi - \pi_1)\rho.$$

Or, comme ces équations sont de même nature que les équations (8) et que seulement ici P_0, Q_0, $\sqrt{\theta x}$, $\pi - \pi_1$ remplacent $P_0 z^2$, Q_0, $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a - bz}{az}\right)}$, ε, nous concluons, d'après les formules précédentes, que la solution de ces équations sera donnée par ces formules

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = \frac{\varphi_0(x) + \sqrt{\theta x}}{\varphi_0(x) - \sqrt{\theta x}}, \qquad \rho = \frac{1}{\pi - \pi_1}\,\partial\frac{\varphi_0(x) + \sqrt{\theta x}}{\varphi_0(x) - \sqrt{\theta x}},$$

où l'on prendra pour $\varphi_0(x)$ zéro ou l'infini si

$$\pi - \pi' = 0,$$

et dans le cas contraire, on développera $\sqrt{\theta x}$ en fraction continue

$$r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{r_1 + \cdots}}}}}}$$

et l'on prendra

$$\varphi_0(x) = r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \ddots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1}}}}.$$

Nous remarquerons encore que si les équations primitives

$$\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}, \qquad \delta\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho$$

remplissent elles-mêmes la condition

$$\delta(uv) + \pi < \sqrt{\theta x},$$

on trouvera leur solution au moyen des formules que nous venons de donner pour résoudre les équations réduites

$$\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u'}{v'}\right)^{\rho} \qquad \delta\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi - \pi_1)\rho.$$

Dans ce cas, on prendra π au lieu de $\pi - \pi_1$, et l'on trouvera a, b, ε en égalant

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{(ax + b)^{\varepsilon}}.$$

§ V.

D'après ce que nous venons de donner sur la solution des équations

$$(10) \qquad \frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}, \qquad \delta\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho,$$

on peut prouver qu'elles sont impossibles, si, θx étant du quatrième degré et $\frac{uvx^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}$ de degré impair, l'équation $\theta x = 0$ n'est pas vérifiée en

prenant pour x une valeur composée des racines de l'équation $uv = 0$ et des coefficients de θx, à l'aide des seuls radicaux carrés, et que, par conséquent, on ne peut pas exprimer en termes finis toutes les intégrales dont la détermination se réduit aux équations (10) de cette catégorie.

Pour le démontrer, nous remarquerons d'abord que, dans le cas où $\frac{uv\,w^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}$ est de degré impair, on peut exécuter la réduction des équations (10), d'après le § III, en prenant cette décomposition de θx en deux facteurs θ_1, θ_2 :

$$\theta_1 = 1, \qquad \theta_2 = \theta x,$$

et si avec ces valeurs de θ_1, θ_2, et en supposant connues les racines de l'équation $uv = 0$, on fait la réduction des équations (10), et qu'on cherche leur solution, on ne rencontre que l'extraction des racines carrées et les différentes opérations rationnelles. Donc, dans toute cette analyse, on n'aura que des quantités qui ne peuvent vérifier l'équation $\theta x = 0$ dans le cas que nous examinons. Or nous allons prouver que tant que cela a lieu, on ne peut donner une solution des équations (10).

D'après le paragraphe précédent, dans la solution des équations (10), on ne peut se passer du développement de $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ ou $\sqrt{\theta x}$ en fraction continue que dans le cas où l'on a

$$\varepsilon = 0 \quad \text{ou} \quad \pi - \pi_1 = 0, \quad a = 0.$$

Mais nous savons (*voyez* § IV) que la quantité ε ne se réduit à zéro que dans le cas où la valeur $x = -\frac{b}{a}$ vérifie ces deux équations

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} = 0, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v} = 0;$$

et comme le produit

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u} \cdot \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v}$$

est égal à

$$\frac{p^2\theta_1 - p^2\theta_2}{uv} = ax + b,$$

cela suppose que le développement de

$$\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{u}, \qquad \frac{p\sqrt{\theta_1} - q\sqrt{\theta_2}}{v},$$

suivant les puissances de $x + \frac{b}{a}$, contient des exposants fractionnaires, ce qui ne peut avoir lieu, à moins que θ_1 ou θ_2 ne contienne le facteur $x + \frac{b}{a}$, et, par conséquent, cela suppose que la valeur $x = -\frac{b}{a}$ vérifie l'équation $\theta_1\theta_2 = \theta x = 0$, ce qui ne peut être admis, comme nous l'avons remarqué.

Le cas de $a = 0$, $\pi - \pi_1 = 0$ ne peut avoir lieu; car nous avons trouvé, dans le paragraphe précédent,

$$\pi_1 - \pi = 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1} + q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}} - \delta\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv},$$

et comme

$$\frac{p^2\theta_1 - q^2\theta_2}{uv} = ax + b,$$

$$\theta_1 = 1, \qquad \theta_2 = \theta x,$$

cela nous donne

$$\pi_1 - \pi = 2\delta\frac{p + q\sqrt{\theta x}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}} - \delta(ax + b)$$

$$= 2\delta\frac{p + q\sqrt{\theta x}}{\sqrt[4]{\theta x}} - \delta\frac{uv.x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}} - \delta(ax + b).$$

Mais dans le cas que nous examinons, la fonction $\frac{uvx^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}$ est de degré impair et la fonction $\frac{p + q\sqrt{\theta x}}{\sqrt[4]{\theta x}}$ d'un degré entier; donc, si $a = 0$, la différence $\pi_1 - \pi$ est de la forme $2k + 1$, et, par conséquent, ne peut se réduire à zéro.

Il nous reste maintenant à prouver qu'on ne parviendra pas non plus à la solution de nos équations par le développement de $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ ou $\sqrt{\theta x}$ en fraction continue. Pour cela, nous allons montrer qu'en général si aucune des racines de l'équation bicarrée $R = 0$ ne peut être exprimée à l'aide des seuls radicaux carrés, la fraction continue, résultante de $\sqrt{R}$, ne peut être périodique, de la forme

$$r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_1 + \ddots + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{r_1 + \ddots}}}}}}$$

En effet, si cela avait lieu, nous savons, par les recherches d'Abel, qu'on parviendrait par ce développement de $\sqrt{R}$ à la solution de l'équation

$$Y_0^2 - Y^2 R = C,$$

où Y_0, Y sont des fonctions entières et C une constante ; le tout, étant déterminé par le développement de $\sqrt{R}$, ne peut contenir que des quantités exprimables par les coefficients de R au moyen des seuls radicaux carrés. Or, une telle solution de l'équation

$$Y_0^2 - Y^2 R = C$$

étant admise, supposons que

$$y_0^2 - y^2 R = c,$$

soit celle parmi elles dans laquelle y diffère de zéro et soit en même temps du degré le moins élevé.

D'après l'équation précédente, nous trouvons

$$y_0^2 - c = y^2 R,$$

et, par conséquent,

$$(y_0 + (\sqrt{c})y_0 - \sqrt{c}) = y^2 \mathrm{R}.$$

Comme $y_0 - \sqrt{c}$, $y_0 + \sqrt{c}$ ne peuvent avoir de commun diviseur, cette équation ne peut être vérifiée à moins qu'on n'ait

$$(11)\quad y_0 + \sqrt{c} = y_1^2 \mathrm{R}_1, \quad y_0 - \sqrt{c} = y_2^2 \mathrm{R}_2, \quad y_1 y_2 = y, \quad \mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2 = \mathrm{R},$$

et, par conséquent,

$$2\sqrt{c} = y_1^2 \mathrm{R}_1 - y_2^2 \mathrm{R}_2.$$

Or on ne peut pas supposer que l'une des fonctions R_1, R_2 se réduise à une constante; car en admettant, par exemple, que $\mathrm{R}_1 = c_1$, on trouve, d'après (11),

$$\mathrm{R}_2 = \frac{\mathrm{R}}{c_1},$$

et, par conséquent, l'équation précédente devient

$$2\sqrt{c} = y_1^2 c_1 - y_2^2 \frac{\mathrm{R}}{c_1},$$

ou

$$2c_1\sqrt{c} = (c_1 y_1)^2 - y_2^2 \mathrm{R},$$

ce qui donne, contre l'hypothèse, une solution de l'équation

$$\mathrm{Y}_0^2 - \mathrm{Y}^2 \mathrm{R} = \mathrm{C},$$

où $\mathrm{Y} = y_2$ est d'un degré moins élevé que y.

Mais les fonctions R_1, R_2 ne peuvent être non plus de degrés supérieurs à zéro; car autrement on parviendrait à décomposer la fonction bicarrée R en deux facteurs $\mathrm{R}_1 . \mathrm{R}_2$, et, par conséquent, à trouver au moins une racine de l'équation $\mathrm{R} = 0$ au moyen des seuls radicaux carrés; car, d'après (11), pour trouver R_1 et R_2, on n'a qu'à chercher le commun diviseur des fonctions $y_0 + \sqrt{c}$ et R, $y_0 - \sqrt{c}$ et R.

§ VI.

En terminant notre Mémoire, nous allons faire le résumé des procédés qui, d'après ce que nous venons d'exposer, constituent, avec nos recherches citées plus haut, une méthode générale d'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré, en tant que cette intégration est possible sous forme finie.

Nous supposons que préalablement la partie rationnelle de ces différentielles a été séparée, et que le reste a été mis sous la forme $\frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, où $f_0 x$, $F_0 x$ n'ont point de commun diviseur; nous supposons aussi que θx, qui n'est que du troisième ou du quatrième degré, n'a pas de facteurs multiples; car, autrement, l'intégration de $\frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$ deviendrait très-simple.

Pour trouver l'intégrale $\int \frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$ sous forme finie, en tant que cela est possible, on procédera de la manière suivante :

1°. On cherchera le plus grand commun diviseur entre les fonctions $F_0 x \theta x$ et $\frac{d(F_0 x \theta x)}{dx}$. Nous dénoterons ce diviseur par Q.

2°. On déterminera les degrés des fonctions $\frac{Q . f_0 x}{F_0 x . \theta x}$, $\frac{Q}{x\sqrt{\theta x}}$. Si ces fonctions sont de degrés inférieurs à -1, le terme algébrique dans l'expression de l'intégrale cherchée est zéro. Dans le cas contraire, on prendra n égal au plus petit nombre entier supérieur aux degrés de ces fonctions, et l'on cherchera les coefficients du polynôme

$$P = B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \ldots + B_2 x^2 + B_1 x + B_0,$$

d'après cette condition : *la fonction*

$$f_0 x - \frac{F_0 x \theta x}{Q}\frac{dP}{dx} - \left(\frac{F_0 x \frac{d\theta x}{dx}}{2Q} - \frac{F_0 x . \theta x . \frac{dQ}{dx}}{Q^2}\right) P,$$

étant divisée par Q, *donne zéro pour reste et pour quotient une fonction d'un degré qui n'est pas plus élevé que celui de* $\frac{F_0 x \sqrt{\theta x}}{x Q}$.

Si cette condition ne peut être remplie, on conclura tout de suite que l'intégrale cherchée est impossible sous forme finie. Dans le cas contraire, on trouvera les coefficients du polynôme P, et l'on conclura que la partie algébrique dans l'intégrale cherchée a pour valeur $\frac{P}{Q}\sqrt{\theta x}$.

3°. On mettra la fonction $\frac{f_0 x}{F_0 x} - \sqrt{\theta x}\,\frac{d\frac{P}{Q}\sqrt{\theta x}}{dx}$ sous la forme $\frac{fx}{Fx}$, où fx, Fx sont des fonctions entières qui n'ont point de commun diviseur; on cherchera les racines de l'équation $Fx = 0$, et l'on calculera des quantités K^0, K', K'', K''', ..., $K^{(l)}$ d'après les équations

$$K^0 = \lim\left[\frac{xfx}{Fx\sqrt{\theta x}}\right]_{x=\infty}, \qquad K' = \frac{f(x')}{F'(x')\sqrt{\theta(x')}},$$

$$K'' = \frac{f(x'')}{F'(x'')\sqrt{\theta(x'')}}, \ldots, \qquad K^{(l)} = \frac{f(x^l)}{F'(x^l)\sqrt{\theta(x^l)}};$$

où x', x'', ..., $x^{(l)}$ désignent les racines de l'équation

$$Fx = 0.$$

4°. On cherchera les nombres entiers M^0, M', M'', ..., $M^{(l)}$ qui rendent

$$M^0 K^0 + M' K' + M'' K'' + \ldots + M^{(l)} K^{(l)} = 0.$$

Soit λ le nombre de toutes les équations de cette forme qui ne sont pas identiques entre elles par rapport à

$$K^0,\ K',\ K'', \ldots,\ K^{(l)},$$

et

$$K^0 = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^0 K^{(\lambda+i)}, \qquad K' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i' K^{(\lambda+i)},$$

$$K'' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i'' K^{(\lambda+i)}, \ldots, \qquad K^{(\lambda-1)} = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^{(\lambda-1)} K^{(\lambda+i)}$$

les valeurs de λ quantités de la série

$$K^0,\ K',\ K'',\ldots,\ K^{(l)},$$

en fonctions des autres, qu'on tire de ces équations.

D'après cela on conclura que la partie logarithmique de l'intégrale cherchée est composée de ces $l-\lambda+1$ termes

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0}\log W_0+\frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1}\log W_1+\ldots+\frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}}\log W_{l-\lambda},$$

où $n_0, n_1,\ldots, n_{l-\lambda}$ désignent des nombres entiers et $W_0, W_1,\ldots, W_{l-\lambda}$ des fonctions de la forme $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$.

5°. Pour trouver un terme quelconque $\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}\log W_i$, on cherchera le plus petit dénominateur auquel les quantités M_i^0, M_i', M_i'',..., $M_i^{(\lambda-1)}$ peuvent être réduites. En dénotant ce dénominateur par σ, on fera

$$\pi=\pm M_i^0\sigma,$$

en prenant celui des deux signes $\pm$ qui appartient à M_i^0, et l'on mettra l'expression

$$\left[(x-x')^{M_i'}(x-x'')^{M_i''}\ldots(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}}(x-x^{(\lambda-1)})\right]^{\pm\sigma}$$

sous la forme d'une fraction simple $\frac{u}{v}$.

6°. On décomposera θx en deux facteurs $\theta_1.\theta_2$, de manière que $\sqrt{\frac{uv\theta_1.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$ ne soit pas d'un degré entier, on trouvera une fonction entière S pour laquelle les fractions

$$\frac{S\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\theta_2}}{u},\qquad \frac{S\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_2}}{v}$$

ne deviennent pas infinies, tant que x reste fini, et en développant

l'expression $\dfrac{S - \sqrt{\dfrac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ en fraction continue, on cherchera parmi les fractions réduites de $\dfrac{S - \sqrt{\dfrac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ celle dont le dénominateur est du degré le plus proche de celui de $\sqrt{\dfrac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta . x}}}$, mais moins élevé que celui de cette fonction.

En dénotant cette fraction par $\dfrac{M}{N}$, on cherchera le quotient de la division de

$$(NS - Muv)^2\theta_1 - N^2\theta_2$$

par uv. Ce quotient sera toujours d'un degré au-dessous du second.

7°. Si ce quotient est une fonction du premier degré $ax + b$, on prendra

$$\frac{K^{(\lambda+l)}}{a_i}\log W_i = \frac{K^{(\lambda+l)}}{\pm\sigma}\log\frac{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} + N\sqrt{\theta_2}}{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} - N\sqrt{\theta_2}},$$

dans le cas où les deux fonctions

$$\frac{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} + N\sqrt{\theta_2}}{u}, \qquad \frac{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} - N\sqrt{\theta_2}}{v}$$

se réduisent à zéro pour $x = -\dfrac{b}{a}$.

Dans le cas contraire, on aura

$$\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}\log W_i$$

$$= \frac{\varepsilon K^{(\gamma+l)}}{\pm\rho\sigma}\log\left\{\left[\frac{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} + N\sqrt{\theta_2}}{(NS - Muv)\sqrt{\theta_1} - N\sqrt{\theta_2}}\right]^{\frac{\rho}{\varepsilon}}\frac{\left(\dfrac{ax+b}{a}\right)^2\varphi\left(\dfrac{a}{ax+b}\right) + \sqrt{\theta x}}{\left(\dfrac{ax+b}{a}\right)^2\varphi\left(\dfrac{a}{ax+b}\right) - \sqrt{\theta x}}\right\},$$

où $\varphi(z)$ est une fonction égale à

$$r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \ddots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r}}}},$$

la fraction continue résultante de $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ étant périodique et de la forme

$$r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \ddots + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \ddots}}}}}}},$$

ρ le degré de $\dfrac{\varphi(z) + \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{\varphi(x) - \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}$, $\varepsilon = +1$ ou -1, selon que $x = -\frac{b}{a}$ vérifie l'équation

$$\frac{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} + \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{u} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} - \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{v} = 0.$$

8°. Si ce quotient se réduit à une constante, on prendra

$$\frac{\mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{n_i}\log \mathrm{W}_i = \frac{\mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{\pm\sigma}\log\frac{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} + \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} - \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}$$

dans le cas ou $\dfrac{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} - \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} + \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}x^{\pi}$ est du degré zéro. Dans le cas

contraire, en désignant par ε le degré de $\frac{(\mathrm{NS}-\mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1}-\mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{(\mathrm{NS}-\mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1}+\mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}x^{\pi}$, on aura

$$\frac{\mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{n_i}\log \mathrm{W}_i = \frac{\varepsilon \mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{\pm \rho\sigma}\log\left\{\left[\frac{(\mathrm{NS}-\mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1}+\mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{(\mathrm{NS}-\mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1}-\mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}\right]^{\frac{\rho}{\varepsilon}}\cdot\frac{\varphi_0(x)+\sqrt{\theta x}}{\varphi_0(x)-\sqrt{\theta x}}\right\},$$

où

$$\varphi_0(x) = r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cdots+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{1}{r_1}}}},$$

la fraction continue résultante de $\sqrt{\theta x}$ étant périodique et de la forme

$$r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cdots+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{2r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cdots}}}}}}},$$

ρ le degré de $\frac{\varphi_0 x+\sqrt{\theta x}}{\varphi_0 x-\sqrt{\theta x}}$.

9°. Ce que nous venons de dire sur la détermination du terme $\frac{\mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{n_i}\log \mathrm{W}_i$ ne sera applicable que dans le cas où le degré de la fonction uvx^{π} surpasse 1. S'il arrive que le degré de uvx^{π} n'est pas au-dessus de 1, le terme $\frac{\mathrm{K}^{(\lambda+i)}}{n_i}\log \mathrm{W}_i$ sera aussi déterminé par les

formules que nous venons d'exposer, seulement on fera

$$\frac{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} + \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}}{(\mathrm{NS} - \mathrm{M}uv)\sqrt{\theta_1} - \mathrm{N}\sqrt{\theta_2}} = 1,$$

on trouvera a, b, ε en égalant $\frac{u}{v} = \frac{1}{(ax+b)^{\varepsilon}}$, et l'on prendra $\varepsilon = \pi$ dans le cas de $a = 0$.

10°. Après avoir trouvé tous les termes logarithmiques, on différentiera leur somme. Si cette différentielle ne se réduit pas à $\frac{fx}{\mathrm{F}x}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, l'intégrale cherchée est impossible sous forme finie; dans le cas contraire, sa valeur sera précisément donnée par la somme

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\sqrt{\theta x} + \frac{\mathrm{K}^{(\lambda)}}{n_0}\log \mathrm{W}_0 + \frac{\mathrm{K}^{(\lambda+1)}}{n_1}\log \mathrm{W}_1 + \ldots + \frac{\mathrm{K}^{(l)}}{n_{l-\lambda}}\log \mathrm{W}_{l-\lambda}.$$

S'il s'agit, par exemple, de trouver l'intégrale

$$\int \frac{2x^6 + 4x^5 + 7x^4 - 3x^3 - x^2 - 8x - 8}{(2x^2-1)^2\sqrt{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}}\,dx,$$

on cherchera le plus grand commun diviseur entre les fonctions

$$(2x^2-1)^2(x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1), \qquad \frac{d[(2x^2-1)^2(x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1)]}{dx}.$$

Comme ce diviseur est $2x^2 - 1$, et que les fonctions

$$\frac{(2x^2-1)(2x^6 + 4x^5 + 7x^4 - 3x^3 - x^2 - 8x - 8)}{(2x^2-1)^2(x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1)}; \qquad \frac{2x^2-1}{x\sqrt{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}}$$

sont de degrés au-dessous de 1, on cherchera les coefficients de la fonction du premier degré $\mathrm{P} = \mathrm{B}_1 x + \mathrm{B}_0$. Pour cela, on divisera

$$2x^6 + 4x^5 + 7x^4 - 3x^3 - x^2 - 8x - 8 - \frac{(2x^2-1)^2}{2x^2-1}(x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1)\mathrm{B}_1$$

$$- \left[\frac{1}{2}\frac{(2x^2-1)^2(4x^3 + 12x^2 + 4x)}{2x^2-1} - \frac{(2x^2-1)^2(x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1).4x}{(2x^2-1)^2}\right](\mathrm{B}_1 x + \mathrm{B}_0)$$

par $2x^2 - 1$. Comme cette division donne le reste

$$\left(4B_1 + 9B_0 - \frac{17}{2}\right)x + \frac{9}{2}B_1 + 4B_0 - \frac{13}{2},$$

et qu'on trouve en outre dans le quotient le terme

$$(1 - B_1)x^4,$$

qui est d'un degré plus élevé que $\frac{(2x^2-1)^2\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}{x(2x^4-1)}$, on égalera tout cela à zéro, ce qui donne les équations

$$4B_1 + 9B_0 - \frac{17}{2} = 0, \qquad \frac{9}{2}B_1 + 4B_0 - \frac{13}{2} = 0, \qquad 1 - B_1 = 0.$$

et de là

$$B_1 = 1, \qquad B_0 = \frac{1}{2}, \qquad P = x + \frac{1}{2}.$$

Donc, le terme algébrique, dans l'expression de l'intégrale cherchée, a cette valeur

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{2x^2 - 1}\sqrt{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}.$$

En réduisant l'expression

$$\frac{2x^6 + 4x^5 + 7x^4 - 3x^2 - x^2 - 8x - 8}{(2x^2-1)^2}$$

$$- \sqrt{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}\,\frac{d\,\frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2-1}\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}{dx}$$

à la forme la plus simple, on parvient à

$$\frac{6x^2 + 5x + 7}{2x^2 - 1};$$

et comme les racines de l'équation $2x^2 - 1 = 0$ sont $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on calculera les quantités K^0, K', K'' d'après les formules

$$K^0 = \lim \left[\frac{x(6x^2 + 5x + 7)}{(2x^2 - 1)\sqrt{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}} \right]_{x=\infty},$$

$$K' = \frac{6x'^2 + 5x' + 7}{4x'\sqrt{x'^4 + 4x'^3 + 2x'^2 + 1}},$$

$$K'' = \frac{6x''^2 + 5x'' + 7}{4x''\sqrt{x''^4 + 4x''^3 + 2x''^2 + 1}},$$

en prenant $x' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x'' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui donne

$$K^0 = 0, \qquad K' = -\frac{5}{2}, \qquad K'' = \frac{5}{2},$$

et, par conséquent, on aura

$$M^0 K^0 + M' K' + M'' K'' = 0, \tag{12}$$

si l'on prend

$$M^0 = 1, \qquad M' = 0, \qquad M'' = 0,$$

ou

$$M^0 = 1, \qquad M' = 1, \qquad M'' = 1.$$

Quant aux autres valeurs de M^0, M', M'' qui satisfont à l'équation (12), elles ne conduisent, par rapport à K^0, K', K'', qu'à des équations identiques à celles qu'on trouve en prenant les valeurs mentionnées de M^0, M', M'', savoir :

$$1.K^0 + 0.K' + 0.K'' = 0, \qquad 0.K^0 + 1.K' + 1.K'' = 0,$$

et ces équations nous donnent

$$K^0 = 0.K'', \qquad K' = -K''.$$

D'après cela, on conclut que la partie logarithmique de l'intégrale

cherchée ne contient qu'un seul terme

$$\frac{\frac{5}{2}}{n_1} \log W_1.$$

Les coefficients de l'expression de K^0 et K' en fonction de K'' n'étant pas fractionnaires, et le coefficient de K'' dans la valeur de K^0 étant zéro, on prendra

$$\sigma = 1, \qquad \pi = 0:$$

on mettra le produit

$$\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

sous la forme d'une fraction

$$\frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{x + \frac{1}{\sqrt{2}}},$$

et, après avoir décomposé $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1$ en deux facteurs $(x+1)(x^3 + 3x^2 - x + 1)$, on cherchera une fonction entière S pour laquelle les fractions

$$\frac{S\sqrt{x+1} + \sqrt{x^3 + 3x^2 - x + 1}}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}, \qquad \frac{S\sqrt{x+1} - \sqrt{x^3 + 3x^2 - x + 1}}{x + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

ne deviennent pas infinies tant que x reste fini, ou, ce qui revient au même, une fonction S qui, pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, se réduise respectivement à

$$\frac{-\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1}} = -\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

et à

$$\frac{\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1}}{\sqrt{-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1}} = \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

D'après cela on trouve

$$S = 1 - 3x.$$

En cherchant la fraction réduite de $\dfrac{1 - 3x - \sqrt{\dfrac{x^3 + 3x^2 - x + 1}{x + 1}}}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, dont

le dénominateur est du degré le plus proche possible de celui de

$$\sqrt{\frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x + 1)x^0}{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}}},$$

mais moins élevé que

$$\sqrt{\frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x + 1)x^0}{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}}},$$

on prendra pour cette fraction $\frac{0}{1}$, et comme

$$\left[1.(1 - 3x) - 0.\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 (x + 1)$$
$$- 1^2.(x^3 + 3x^2 - x + 1) = 8x^3 - 4x,$$

divisé par

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = x^2 - \frac{1}{2},$$

donne pour quotient $8x$, et que $x = 0$ rend nulle la dernière de deux

expressions

$$\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

le terme logarithmique, d'après le 7°, sera donné par la formule

$$\frac{-1\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot\rho}\log\left\{\left[\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right]^{\frac{\rho}{-1}}\times\frac{x^2\varphi\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}{x^2\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\right\},$$

ou ρ désigne le degré de $\dfrac{\varphi(z)+\sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4+4\left(\frac{1}{z}\right)^3+2\left(\frac{1}{z}\right)^2+1\right]}}{\varphi(z)-\sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4+4\left(\frac{1}{z}\right)^3+2\left(\frac{1}{z}\right)^2-1\right]}}$

Pour trouver la fonction $\varphi(z)$, on développera le radical

$$\sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4+4\left(\frac{1}{z}\right)^3+2\left(\frac{1}{z}\right)^2+1\right]}=\sqrt{z^4+2z^2+4z+1}$$

en fraction continue. Comme on trouve

$$\sqrt{z^4+2z^2+4z+1}=z^2+1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}z+\cfrac{1}{2z-2+\cfrac{1}{\frac{1}{2}z+\cfrac{1}{2(z^2+1)+\cdots}}}},$$

on prendra

$$\varphi(z) = z^2 + 1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}z + \cfrac{1}{2z - 2 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}z}}},$$

ce qui donne

$$\varphi(z) = \frac{z^5 - z^4 + 3z^3 + z^2 + 2}{z^3 - z^2 + 2z},$$

et par conséquent ρ, degré de $\dfrac{\varphi(z) + \sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{z}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 1\right]}}{\varphi(z) - \sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{z}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 1\right]}}$,

est égal à 10.

Ainsi en faisant, pour abréger,

$$\Delta = \sqrt{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1},$$

le terme logarithmique cherché aura cette valeur

$$-\frac{5}{2.10}\log\left\{\begin{array}{c}\left[\dfrac{(1-3x)\sqrt{x+1} + \sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1} - \sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right]^{-10} \\ \times \dfrac{x^2\left[\left(\frac{1}{x}\right)^5 - \left(\frac{1}{x}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\right] + \left[\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right)\right]\Delta}{x^2\left[\left(\frac{1}{x}\right)^5 - \left(\frac{1}{x}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\right] - \left[\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right)\right]\Delta}\end{array}\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{4}\log\left\{\begin{array}{c}\left[\dfrac{(1-3x)\sqrt{x+1} + \sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1} - \sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right]^{10} \\ \times \dfrac{2x^5 + x^3 + 3x^2 - x + 1 - (2x^2 - x + 1)\Delta}{2x^5 + x^3 + 3x^2 - x + 1 + (2x^2 - x + 1)\Delta}\end{array}\right\}.$$

Donc, si l'intégrale cherchée peut être exprimée sous forme finie, elle

doit être égale à

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2-1}\Delta+\frac{1}{4}\log\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right]^{10}\\ \times\dfrac{2x^5+x^3+3x^2-x+1-(2x^2-x+1)\Delta}{2x^5+x^3+3x^2-x+1+(2x^2-x+1)\Delta}\end{array}\right\}:$$

où

$$\Delta=\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}.$$

Effectivement, on trouve par la différentiation que c'est bien la valeur de l'intégrale

$$\int\frac{2x^6+4x^5+7x^4-3x^3-x^2-8x-8}{(2x^3-1)^2\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\,dx,$$

sur laquelle nous avons opéré.

SUR

QUELQUES INTÉGRALES ELLIPTIQUES;

PAR M. O. SCHLÖMILCH [*].

C'est par des substitutions imaginaires que Jacobi a trouvé les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\varphi}{\Delta(k,\varphi)} d\varphi, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)} d\varphi, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\,\Delta(k,\varphi)}{\Delta(k,\varphi)} d\varphi,$$

dans lesquelles $\Delta(k,\varphi)$ désigne $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$; mais on peut arriver aux mêmes résultats par des transformations réelles, comme je vais le faire voir.

En prenant la dérivée par rapport à p de la formule connue

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p-1}\omega\, d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}, \qquad p>0.$$

on obtient

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\sin\omega \sin^{2p-1}\omega\, d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}\left[\frac{dl\Gamma(p)}{dp} - \frac{dl\Gamma(p+\frac{1}{2})}{dp}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}\int_0^1 \frac{x^{p-\frac{1}{2}} - x^{p-1}}{1-x}\, dx;$$

soient de plus

$$p = n+\frac{1}{2}, \qquad x = z^2,$$

et l'on aura

$$(1) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\sin\omega \sin^{2n}\omega\, d\omega = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}\int_0^1 \frac{z^{2n}dz}{1+z}, \qquad n>-\frac{1}{2}.$$

[*] En insérant cet article, je crois devoir rappeler au lecteur les belles recherches que M. William Roberts nous a données sur le même sujet (1re série, tome XI, page 471, et tome XII, page 455). J. LIOUVILLE.

Cette formule donne par exemple ce résultat très-connu

$$(2)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l \sin\omega\, d\omega = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dz}{1+z} = -\frac{\pi}{2} l 2.$$

Si n est un nombre positif et entier, on a de plus

$$(3)\left\{\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l \sin\omega \sin^{2n}\omega\, d\omega &= -\frac{\pi}{2}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\int_0^1 \frac{z^{2n}\,dz}{1+z} \\ &= -\frac{\pi}{2}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\left(l 2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \ldots + \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}\right.$$

A l'aide des formules (2) et (3), on trouve encore

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\omega\, d\omega}{1 - r^2 \sin^2\omega} = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 z^2}}\,\frac{dz}{1+z}, \qquad 1 > r > -1;$$

et en effectuant l'intégration indiquée dans le second membre, on en conclut

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\omega\, d\omega}{1 - r^2 \sin^2\omega} = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\, l\left(1 + \sqrt{1-r^2}\right),$$

ou bien

$$(4)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\omega\, d\omega}{1 - r^2 \sin^2\omega} = -\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{1-\sqrt{1-r^2}}\right) - \frac{\pi}{2}\frac{lr}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Cette formule qui n'était pas connue, ce me semble, conduit immédiatement à la première des intégrales cherchées. En effet, prenons $r = k \sin\varphi$, et multiplions par $d\varphi$ l'équation (4), puis intégrons entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; il nous viendra

$$(5)\left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\omega\, d\omega}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\omega} \\ &= -\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\, l\left[\frac{1+\Delta(k,\varphi)}{1-\Delta(k,\varphi)}\right] - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l(k\sin\varphi)\, d\varphi}{\Delta(k,\varphi)}. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale qui forme le premier membre se transforme en

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l \sin\omega \, d\omega \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + (1 - k^2 \sin^2\omega)\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\omega \, d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega}};$$

la première intégrale du second membre a pour valeur $\pi K'$ [*], comme on sait; la seconde intégrale est égale à

$$lk.K + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\varphi}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi;$$

au moyen de ces substitutions, on parvient à l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\omega \, d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega}} = -\frac{\pi}{2}K' - K\,lk - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\varphi}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi.$$

Les intégrales à gauche et à droite sont identiques; il s'ensuit

$$(6) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\varphi}{\Delta(k, \varphi)} = -\frac{1}{2} K\,lk - \frac{1}{4}\pi K'.$$

Quant aux autres intégrales cherchées, elles se déduisent aisément de l'intégrale précédente. En faisant usage de la substitution connue $\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{k'}\cot\psi$, on trouve d'abord

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\Delta(k, \varphi)}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{lk' - l\Delta(k, \psi)}{\Delta(k, \psi)} d\psi = K\,lk' - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\Delta(k, \psi)}{\Delta(k, \psi)} d\psi,$$

et, par conséquent,

$$(7) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\Delta(k, \varphi)}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} K\,lk'.$$

---

[*] Nous nous servons ici et plus bas de la notation connue de Jacobi dans ses *Fundamenta nova*.

Ensuite on a, par la même substitution,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\,d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{lk' + l\sin\psi - l\Delta(k,\psi)}{\Delta(k,\psi)}\,d\psi,$$

ou bien

$$(8)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)}\,d\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{K}\,l\left(\frac{k'}{k}\right) - \frac{1}{4}\pi\mathrm{K}'.$$

La formule (6) conduit directement au développement de K suivant les puissances de k' (Legendre, chapitre XIV); en changeant entre eux k et k', on a d'abord

$$\mathrm{K} = \frac{2}{\pi}\mathrm{K}'\,l\left(\frac{1}{k'}\right) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\varphi}{\Delta(k',\varphi)}\,d\varphi.$$

Maintenant il suffit de prendre

$$\frac{2}{\pi}\mathrm{K}' = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k'^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k'^6 + \ldots.$$

$$\Delta(k',\varphi) = 1 + \frac{1}{2}k'^2\sin^2\varphi + \frac{1.3}{1.4}k'^4\sin^4\varphi + \ldots,$$

et d'effectuer les intégrations à l'aide des formules (2) et (3), pour avoir sur-le-champ

$$\mathrm{K} = l\left(\frac{4}{k'}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 1\right]k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3.4}\right]k'^4$$
$$+ \left(\frac{1.3.5}{2.4.5}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{2}{5.6}\right]k'^6 + \ldots,$$

comme Legendre l'a trouvé d'une autre manière.

Dresde, 5 janvier 1857.

SUR L'INTÉGRALE

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}:$$

Extrait d'une Lettre de M. O. SCHLÖMILCH. — Extrait d'une Lettre de M. A. CAYLEY. — Remarques de M. LIOUVILLE.

J'ai reçu de M. Schlömilch, avec l'intéressant travail qui précede, une Lettre contenant quelques observations au sujet de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$$

et de l'article que j'ai inséré dans le cahier de novembre dernier. La Lettre du savant géomètre de Dresde porte la date du 5 janvier 1857. Une autre communication relative à la même intégrale m'a été faite plus tard (le 24 janvier) par M. A. Cayley, de Londres. Il m'a paru convenable de réunir sous un seul titre la Lettre de M. Schlömilch, celle de M. Cayley, et les remarques que j'ai cru devoir ajouter moi-même.

I.

Voici d'abord la Lettre de M. Schlömilch :

« ... La réduction de l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}},$$

que vous avez présentée dans le cahier de novembre 1856 de votre jour-

nal, me donne l'occasion de vous écrire quelques lignes. Je me permets de remarquer que votre réduction coïncide au fond avec celle que j'ai donnée dans mon livre *Analytische Studien* (*Etudes analytiques*), Leipzig, 1848, tome I, pages 83 et suivantes. Vous trouverez aussi la formule dans la collection des intégrales définies de M. Bierens de Han à Amsterdam. J'ai établi d'abord la formule

$$\int_0^\infty F\left(\frac{\alpha}{x}+\gamma x\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_0^\infty F\left(2\sqrt{\alpha\gamma}+y\right)\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

que l'on peut généraliser par différentiation suivant α ou γ, et j'en ai déduit entre autres la réduction

$$\int_0^\infty \frac{x^{m+\frac{1}{2}}dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{m+1}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-1}dy}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma}+y)^{m+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)}\frac{1}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^{m+1}},$$

qui ne diffère pas de la vôtre.

» De plus, j'ai trouvé ce résultat

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}n}\int_0^\infty\frac{x^{p+n}\,dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{p+\frac{1}{2}}}\\ &=\frac{\Gamma(p)}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^p}+\frac{N_1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\frac{\Gamma(p-1)}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^{p-1}}\\ &\qquad+\frac{N_2}{(2\sqrt{\alpha\gamma})^2}\frac{\Gamma(p-2)}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^{p-2}}+\ldots\end{aligned}\right|\ p>n,$$

en désignant par N_1, N_2,... les coefficients

$$\frac{(n+1)n}{2},\qquad \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4},$$
$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.6},\ \text{etc.},$$

(n un nombre entier).

» En prenant $\alpha=\gamma=1$, $\beta=0$, on en déduit un théorème sur les

fonctions Γ, savoir :

$$\frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p+n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n}{2}\right)=\Gamma(p)+N_1\Gamma(p-1)+N_2\Gamma(-2)+\ldots.$$

Je serais heureux si ces résultats avaient quelque intérêt pour vous...»

II.

Voici maintenant, et toujours au sujet de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}},$$

l'article que j'ai reçu de M. Cayley :

« Je suppose que le lecteur ait sous les yeux la Note de M. Liouville (tome I, 2e série, page 421). Cela étant, en rétablissant les valeurs de g, h et en écrivant $i-1$, au lieu de μ, la formule de M. Liouville devient

$$(1)\qquad \int_0^1 \frac{t^{i-\frac{1}{2}}(1-t)^{i-\frac{3}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^i}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{a+b-c}\,\Gamma(i)\left[2a+b+2\sqrt{a(a+b-c)}\right]^{i-\frac{1}{2}}},$$

laquelle, en y posant

$$t=\frac{x}{1+x},$$

se transforme en celle-ci :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{x^{i-1}\,dx}{\left[(a+b-c)x^2+(2a+b)x+a\right]^i}\\ &=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{a+b-c}\,\Gamma(i)\left[2a+b+2\sqrt{a(a+b-c)}\right]^{i-\frac{1}{2}}};\end{aligned}\right.$$

et en mettant le dénominateur de l'intégrale sous la forme

$$\left[(a+b-c)(x+\lambda)(x+\mu)\right]^i,$$

la formule devient

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{i-\frac{1}{2}}\,dx}{\left[(x+\lambda)(x+\mu)\right]^i}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(i)}\,\frac{1}{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu})^{2i-1}}:$$

formule qui se trouve dans mon Mémoire : *On certain formulæ for differentiation with applications to the evaluation of definite integrals*, Camb. and Dubl. Math. Journal, tome II, page 122; 1847. La démonstration que j'y ai donnée n'est cependant rigoureuse (à moins que l'on n'admette la théorie de la différentiation à indices quelconques) que pour le cas de $i+\frac{1}{2}$ égal à un entier positif; en effet, en écrivant

$$U_{k,i} = [(x+\lambda)(x+\mu)]^{\frac{1}{2}k}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i},$$

je suis parti de la formule

$$\frac{d}{dx}U_{k,i} = \frac{1}{2}k(\lambda-\mu)^2 U_{k-2,i-1} - (k+i)U_{k-1,i},$$

pour en déduire l'expression générale de $\left(\frac{d}{dx}\right)^s U_{0,i}$. Cette expression devient très-simple pour le cas $s=i+1$; on a alors

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(-)^{i+1}}{i}\left(\frac{d}{dx}\right)^{i+1}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i} \\ &= \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}(\lambda-\mu)^{2i}\frac{1}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{i+\frac{1}{2}}}, \end{aligned}\right.$$

formule de différentiation assez singulière. En y écrivant $i-\frac{1}{2}$, au lieu de i, et en intégrant $i+\frac{1}{2}$ fois par la formule

$$\int_0^\infty x^{i-\frac{1}{2}} fx\,dx = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{(-)^{i+\frac{1}{2}}}\left(\int_\infty d\alpha\right)^{i+\frac{1}{2}} f\alpha, \qquad \alpha = 0,$$

on obtient la formule intégrale ci-devant mentionnée. Il convient d'ajouter que cette formule, représentée sous la forme

$$(5)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{i-\frac{1}{2}}dx}{(ax^2+bx+c)^i} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i)}\frac{1}{(b+2\sqrt{ac})^{i-\frac{1}{2}}},$$

est comprise dans une formule générale donnée par M. Schlömilch : *Note sur la variation des constantes arbitraires d'une intégrale définie* (*Crelle*, tome XXXIII, page 268; 1847).

» Je remarque aussi que M. Donkin, en comparant ses résultats concernant les fonctions de Laplace avec ceux de M. Boole sur le même sujet, a trouvé une identité, laquelle m'a conduit à cette autre formule de différentiation

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{\frac{[(x+\lambda)(x+\mu)]^2}{2x+\lambda+\mu}\frac{d}{dx}\right\}^n \frac{(2x+\lambda+\mu)^{n+s-1}}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2n-2s}} \\ &\qquad = \frac{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{n+1}}{(2x+\lambda+\mu)^{n-s+1}}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2s}}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}\right.$$

formule que j'ai démontrée au moyen d'une analyse assez compliquée. »

III.

Je ne puis que me féliciter de l'attention que des géomètres distingués ont accordée à mes recherches sur un point si simple. Cela m'encouragera à publier d'autres résultats analogues que j'ai obtenus, et qui pourront contribuer au progrès de la théorie, aujourd'hui peu avancée, des intégrales à quatre ou à plus de quatre facteurs. On a vu dans le cahier de décembre (que M. Schlömilch et même peut-être M. Cayley ne connaissaient pas quand ils m'ont écrit), que la valeur de l'intégrale

$$U = \int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$$

peut se déduire, par une simple différentiation à indices quelconques, de l'équation

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t}.\,dt}{[g^2t+h^2(1-t)+ct(1-t)]\sqrt{1-t}} = \frac{\pi}{g\sqrt{c+(g+h)^2}},$$

et d'autres équations semblables où l'intégration, même indéfinie, s'effectue de suite par les méthodes générales, qui appartiennent à tout le monde. Elle résulte aussi d'une formule de M. W. Thomson, et quant

à moi, je l'ai trouvée, comme je l'ai déjà dit, en m'occupant, il y a douze ans, de revoir une épreuve de la Note intitulée : *Démonstration d'un théorème d'analyse*, que cet habile géomètre a insérée dans le cahier d'avril 1845 de notre Journal. Je reconnais du reste que M. Schlömilch a publié avant moi un résultat parfaitement équivalent. J'ajouterai même qu'avec un peu de bonne volonté, on pourra remonter plus haut, car la formule

$$\int_0^\infty \mathrm{F}\left(\frac{\alpha}{x}+\gamma x\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_0^\infty \mathrm{F}\left(2\sqrt{\alpha\gamma}+y\right)\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

dont M. Schlömilch tire si facilement l'intégrale qui nous occupe, revient à celle-ci :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(a\alpha^2 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\alpha^2}\right)d\alpha = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha^2)\,d\alpha,$$

que M. Cauchy a donnée, il y a près de trente-cinq ans, dans le XIXe cahier du *Journal de l'École Polytechnique ;* c'est la formule marquée (27) à la page 518 du cahier cité.

Au fond je n'ai rédigé ces deux petits articles de *novembre* et de *décembre* que pour présenter sous son vrai jour la formule de M. Thomson, et aussi pour préparer un exemple développé à des recherches étendues que je compte donner sur les intégrales à un nombre quelconque de facteurs. J'ai commencé en effet à m'occuper de ces intégrales, en même temps que des différentielles à indices quelconques (il y a longtemps, comme on voit), et depuis j'y suis souvent revenu, mais sans avoir jamais porté sur ce sujet l'attention suivie qu'il mérite. Je n'en ai donc cultivé pour ainsi dire que des parties détachées, qu'il faudrait réunir pour qu'elles prissent toute leur valeur.

C'est ainsi qu'en parcourant mes papiers, je rencontre l'intégrale

$$\mathrm{U} = \int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}},$$

mise sous la forme

$$\mathrm{U} = \int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(1-\alpha t)^{\mu+1}(1-\beta t)^{\mu+1}},$$

et présentée comme un cas particulier de celle-ci :

$$V = \int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}{(1-\alpha t)^r(1-\beta t)^{p+q-r}},$$

qui se ramène toujours à la série de Gauss, c'est-à-dire aux intégrales à trois facteurs.

En considérant en effet l'intégrale générale

$$W = \int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}{(1-\alpha t)^r(1-\beta t)^s},$$

dont V se déduit en prenant $r+s=p+q$, on trouve que W peut se transformer de cette manière :

$$W = \frac{(1-\alpha)^{q-r}}{(1-\beta)^s}\int_0^1 \frac{t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\alpha t)^{p+q-r-s}(1-\gamma t)^s},$$

où

$$\gamma = \frac{\alpha-\beta}{1-\beta}.$$

L'intégrale à quatre facteurs du second membre se réduit à une intégrale trinôme, quand on fait

$$r+s=p+q, \quad s=p+q-r,$$

et l'on en conclut

$$V = \frac{(1-\alpha)^{q-r}}{(1-\beta)^{p+q-r}}\int_0^1 \frac{t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\gamma t)^{p+q-r}}.$$

La condition indiquée

$$r+s=p+q$$

se trouve vérifiée pour l'intégrale U, puisqu'alors on a

$$p=\mu+\frac{3}{2}, \quad q=\mu+\frac{1}{2}, \quad r=s=\mu+1;$$

mais elle l'est également dans une multitude d'autres cas, et fournit de nombreuses propriétés des intégrales V auxquelles on se trouve en droit de transporter tout ce que nous savons sur les intégrales trinômes. Quelquefois on pourra être conduit, comme pour l'intégrale U, à une expression finie : je vais en donner un exemple.

Posons $q = p$ et $r = p + \frac{1}{2}$, de manière que l'intégrale V devienne

$$V' = \int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\alpha t)^{p+\frac{1}{2}}(1-\beta t)^{p-\frac{1}{2}}},$$

et je dis que l'on aura

$$V' = \frac{2^{2p-1}\,\Gamma(p)^2}{\sqrt{1-\alpha}\,(\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1-\beta})^{2p-1}\,\Gamma(2p)}.$$

En effet, par la formule de réduction ci-dessus, et en continuant à poser

$$\gamma = \frac{\alpha-\beta}{1-\beta},$$

on trouve d'abord

$$V' = \frac{(1-\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{(1-\beta)^{p-\frac{1}{2}}}\int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\gamma t)^{p-\frac{1}{2}}}.$$

Mais on a

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\gamma t)^{p-\frac{1}{2}}} = 2^{2p-1}\frac{\Gamma(p)^2}{\Gamma(2p)}\left(\frac{1-\sqrt{1-\gamma}}{\gamma}\right)^{2p-1},$$

comme je l'ai déjà dit dans ce Journal, et comme on peut aisément le vérifier au moyen, par exemple, d'un développement en série. Substituant dans la valeur de V′ et réduisant, il s'ensuit

$$V' = \frac{2^{2p-1}\,\Gamma(p)^2}{\sqrt{1-\alpha}\,(\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1-\beta})^{2p-1}\,\Gamma(2p)},$$

conformément à ce que j'avais avancé.

J'ajouterai ici deux mots sur la transformation concernant l'intégrale générale

$$W = \int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}{(1-\alpha t)^r(1-\beta t)^s}.$$

Elle s'effectue en posant

$$t = \frac{1-x}{1-\alpha x}, \quad \gamma = \frac{\alpha-\beta}{1-\beta},$$

d'où

$$dt = -\frac{(1-\alpha)\,dx}{(1-\alpha x)^2}, \qquad 1-t = \frac{(1-\alpha)\,x}{1-\alpha x},$$

et

$$1-\alpha t = \frac{1-\alpha}{1-\alpha x}, \qquad 1-\beta t = \frac{(1-\beta)(1-\gamma x)}{1-\alpha x}.$$

Substituez, et vous trouverez finalement, en changeant x en t dans le résultat,

$$W = \frac{(1-\alpha)^{q-r}}{(1-\beta)^s}\int_0^1 \frac{t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\alpha t)^{p+q-r-s}(1-\gamma t)^s}.$$

Ce mode de transformation, qui s'offre de lui-même, convient du reste aux intégrales à un nombre quelconque de facteurs.

Plus tard, et à mesure que les occasions se présenteront, je pourrai donner d'autres détails sur cette théorie des intégrales à plusieurs facteurs, que l'on doit indiquer aux jeunes géomètres comme un sujet d'étude propre à exercer leurs forces, et en même temps très-digne d'une profonde investigation.

THÉORÈME

CONCERNANT

LES SOMMES DE DIVISEURS DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Désignons par $\int m$ la somme des diviseurs de m, en sorte que l'on ait $\int 1 = 1$, et en général

$$\int m = 1 + d + \ldots + m = \sum d.$$

A chaque diviseur d de m répond un autre diviseur δ tel que $m = d.\delta$. En particulier, pour le diviseur 1, on a $\delta = m$, et pour le diviseur m, $\delta = 1$.

Cela posé, et le signe $\sum$ s'étendant comme ci-dessus à tous les diviseurs d de m, y compris 1 et m, je trouve que

$$\sum\left(d \int d\right) = \sum\left(\delta^2 \int d\right).$$

On peut donner de cette proposition plusieurs démonstrations, toutes fort simples.

Prenons pour exemple le nombre 6 dont les diviseurs sont $d = 1$, 2, 3, 6, ce qui donne $\delta = 6, 3, 2, 1$. On devra avoir

$$\int 1 + 2\int 2 + 3\int 3 + 6\int 6 = 36\int 1 + 9\int 2 + 4\int 3 + \int 6;$$

en d'autres termes, à cause de

$$\int 1 = 1, \quad \int 2 = 3, \quad \int 3 = 4, \quad \int 6 = 12,$$

il faudra que

$$1 + 2.3 + 3.4 + 6.12 = 36 + 9.3 + 4.4 + 12,$$

ce qui a lieu en effet, puisque le total aux deux membres est 91.

SUR UNE NOUVELLE FORMULE POUR LA DÉTERMINATION DE LA DENSITÉ D'UNE COUCHE SPHÉRIQUE INFINIMENT MINCE, QUAND LA VALEUR DU POTENTIEL DE CETTE COUCHE EST DONNÉE EN CHAQUE POINT DE LA SURFACE;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET.

(Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 28 novembre 1850.

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR M. JULES HOUEL.

D'après un beau théorème, énoncé et démontré pour la première fois par Gauss [*], on peut couvrir une surface quelconque d'une couche de matière infiniment mince, dont le potentiel ait en chaque point une valeur donnée arbitrairement, pourvu que cette valeur varie d'une manière continue sur toute l'étendue de la surface. Mais les moyens d'effectuer cette distribution de la masse ne sont praticables, dans l'état actuel de la science, que pour quelques surfaces particulières, parmi lesquelles, comme Gauss l'a déjà remarqué, se trouve la surface totale de la sphère.

Soient R le rayon de la sphère, r la distance d'un point quelconque de l'espace au centre de cette sphere, θ l'angle du rayon vecteur r avec une droite fixe, φ l'angle dièdre compris entre le plan mené par cette droite et par r, et un certain plan fixe. La valeur V du potentiel, donnée sur toute l'étendue de la surface en fonction de θ et de φ, pourra se développer au moyen des fonctions connues sous le nom de *fonctions sphériques*. Soit

$$V = \sum X_n$$

[*] *Théorèmes généraux sur les forces attractives et répulsives agissant en raison inverse du carré de la distance*, par C.-F. Gauss.

ce développement, le signe sommatoire s'étendant depuis $n = 0$ jusqu'à $n = \infty$, et soit

$$\rho = \sum Y_n$$

le développement analogue de la densité ρ que l'on se propose de déterminer. On peut, au moyen de ce dernier développement, exprimer le potentiel v relatif à un point quelconque de l'espace [*]. Des deux expressions de ce potentiel, qui se rapportent, l'une à l'espace intérieur, l'autre à l'espace extérieur à la couche, et qui conviennent toutes les deux à l'objet que nous avons en vue, la première est

$$v = 4\pi R \sum \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n.$$

Cette formule étant vraie jusqu'à la valeur $r = R$, pour laquelle v se change en V, et cette dernière quantité n'étant développable que d'une seule manière en fonctions sphériques, la comparaison avec la première série donne

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi R} X_n,$$

et, par conséquent,

$$\rho = \frac{1}{4\pi R} \sum (2n+1) X_n.$$

Dans un précédent Mémoire [**], j'ai montré que toute fonction donnée arbitrairement pour toute la surface de la sphère, c'est-à-dire depuis $\theta = 0$, $\varphi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, $\varphi = 2\pi$, pourvu qu'elle ne devienne jamais infinie, pourra toujours être développée en une série convergente de fonctions sphériques. Le développement de V en série, sur lequel est fondée la solution que nous venons d'indiquer, est donc sans aucun doute convergent. Mais il n'en est plus de même pour la série $\sum Y_n$, que nous avons prise pour représenter la densité ρ, et que nous avons ensuite déterminée par comparaison avec la première. Comme

[*] *Mécanique céleste*, livre III, n° 13.

[**] Sur les séries dont le terme général, etc., *Journal de Crelle*, tome XVII.

l'existence d'une distribution complétement déterminée de la masse, correspondant à la valeur donnée du potentiel V, n'est pas incompatible avec la supposition que la densité devienne infinie en certains points ou suivant certaines lignes, il en résulte, toutes les fois que cela a lieu, qu'on n'est plus en droit de décider si, pour tous les points où la densité reste finie, la série conserve sa convergence et représente réellement la densité. Il m'a paru assez intéressant de soumettre cette question à une discussion plus approfondie, mon premier Mémoire contenant déjà les procédés dont on peut avoir besoin; d'autant plus que l'on pouvait s'attendre à tirer de ces recherches un moyen de simplifier l'expression que nous venons de trouver pour ρ. Cette expression indique quatre opérations infinies, une double sommation et une double intégration. Il est aisé de voir que l'on ne peut pas débarrasser l'expression générale de ρ de la double intégration; car la densité en chaque point dépend nécessairement de toutes les valeurs que l'on peut donner arbitrairement au potentiel sur toute l'étendue de la surface en satisfaisant à la condition de continuité. Mais il arrive, au contraire, que la densité peut toujours être représentée, avec un nombre *fini* de termes, par une intégrale double, qui dans plusieurs cas se ramène à une intégrale simple.

§ I.

Si l'on pose

$$V = f(\theta, \varphi),$$

on aura, comme on sait, pour la valeur du terme général X_n,

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int\int f(\theta', \varphi') P_n(\cos\omega) \sin\theta' d\theta' d\varphi',$$

en faisant

$$\cos\omega = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

et désignant par $P_n(\cos\omega)$ le coefficient de α^n dans le développement de l'expression radicale

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2}}.$$

La double intégration s'étend depuis $\theta' = 0$, $\varphi' = 0$ jusqu'à $\theta' = \pi$, $\varphi' = 2\pi$. En négligeant le diviseur R, ou, ce qui revient au même, en prenant le rayon de la sphère égal à l'unité, le terme général de la série qui représente ρ devient

$$\frac{(2n+1)^2}{(4\pi)^2} \int\int f(\theta', \varphi') \, P_n(\cos\omega) \sin\theta' \, d\theta' \, d\varphi'.$$

Il suffira évidemment d'examiner cette série pour le cas où l'on fera $\theta = 0$, c'est-à-dire pour le pôle p des coordonnées polaires sphériques θ, φ; car, comme dans mon premier Mémoire, le résultat trouvé pour le point p peut être étendu immédiatement à tout autre point m de la surface. On a alors

$$\cos\omega = \cos\theta',$$

et $P_n(\cos\omega)$ ne dépend plus de φ'. Posons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') \, d\varphi' = F(\theta'),$$

de sorte que $F(\theta')$ désigne la valeur moyenne du potentiel V sur le cercle décrit du point p comme pôle, avec le rayon sphérique θ'; écrivons aussi γ à la place de θ', pour nous conformer aux notations du premier Mémoire, auquel nous aurons souvent occasion de renvoyer. Le terme général deviendra

$$\frac{(2n+1)^2}{8\pi} \int_0^{\pi} F(\gamma) \, P_n(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma.$$

Décomposant $(2n+1)^2$ dans ses différents termes $4n^2$, $4n$, 1, le terme général se partagera en trois autres, et, par suite, la série en trois séries partielles. La convergence de la seconde et de la troisième de ces séries ayant déjà été démontrée dans le premier Mémoire, nous n'avons plus à nous occuper que de la première, qui a pour terme général

$$\frac{1}{2\pi} n^2 \int_0^{\pi} F(\gamma) \, P_n(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma.$$

Prenons la somme des $n+1$ premiers termes; exprimons, au moyen

de l'équation (3) du premier Mémoire, $P_n(\cos\gamma)$ par une intégrale définie, et intervertissons ensuite l'ordre des intégrations : il viendra

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi (\cos\psi + 4\cos 2\psi + \ldots + n^2\cos n\psi)\,\Pi(\psi)\,d\psi,$$

en faisant toujours

$$\Pi(\psi) = \sin\frac{\psi}{2}\int_0^\psi F(\gamma)\sin\gamma\frac{d\gamma}{\Delta} + \cos\frac{\psi}{2}\int_\psi^\pi F(\gamma)\sin\gamma\frac{d\gamma}{E},$$

$$\Delta = \sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}, \qquad E = \sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}.$$

Puisque les intégrales qui entrent dans $\Pi(\psi)$ sont toujours des fonctions continues de ψ, depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \pi$ (premier Mémoire, § III), la fonction $\Pi(\psi)$ doit jouir elle-même de la même propriété. La question que nous traitons exige en outre la discussion du quotient différentiel $\Pi'(\psi)$; pour la formation de ce quotient, la présence des dénominateurs Δ, E dans les intégrales exige une transformation préalable au moyen de l'intégration par parties. En remarquant que la fonction $F(\gamma)$, d'après la manière dont elle provient de la valeur continue du potentiel $f(\theta, \varphi)$, doit elle-même être continue, on trouve, par cette double opération,

$$\begin{aligned}\Pi'(\psi) = {} & [F(0) - F(\pi)]\sin\psi \\ & + \frac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2}\int_0^\psi F'(\gamma)\,\Delta\,d\gamma + \frac{1}{2}\sin\frac{\psi}{2}\int_\psi^\pi F'(\gamma)\,E\,d\gamma \\ & + \sin\frac{\psi}{2}\sin\psi\int_0^\psi F'(\gamma)\frac{d\gamma}{\Delta} + \cos\frac{\psi}{2}\sin\psi\int_\psi^\pi F'(\gamma)\frac{d\gamma}{E}.\end{aligned}$$

Admettons maintenant que $F'(\gamma)$ reste toujours finie depuis $\gamma = 0$ jusqu'à $\gamma = \pi$. Alors chacun des termes de $\Pi'(\psi)$, et par suite $\Pi'(\psi)$ elle-même, seront finis et continus depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \pi$. Cela est évident pour les trois premiers termes, et quant aux deux derniers, on peut se convaincre, par des considérations tout à fait semblables à celles que nous avons employées dans le premier Mémoire, que les intégrales qu'ils renferment conserveront cette double propriété tant que l'on sup-

posera dans la première $\psi < \pi$, et dans la seconde $\psi > 0$. Pour $\psi = \pi$ et $\psi = 0$ respectivement, ces intégrales prennent, il est vrai, des valeurs infinies; mais les ordres de ces valeurs, comme on peut le voir facilement, ne peuvent respectivement dépasser ceux de $\log\left(\frac{1}{\cos\frac{\psi}{2}}\right)$ et de $\log\left(\frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}\right)$, de sorte que les termes eux-mêmes seront nuls.

La suite de ce travail exige encore que l'on connaisse la valeur de la seconde dérivée $\Pi''(\psi)$ pour $\psi = 0$. En remarquant que $\Pi'(0) = 0$, on trouvera facilement la valeur cherchée en supposant ψ infiniment petit dans le rapport $\frac{1}{\psi}\Pi'(\psi)$. On a ainsi

$$\Pi''(0) = F(0) - F(\pi) + \frac{1}{2}\int_0^\pi F'(\gamma)\sin\frac{\gamma}{2}\,d\gamma + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{F'(\gamma)\,d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

ou, en intégrant par parties le troisième terme,

$$\Pi''(0) = F(0) - \frac{1}{2}F(\pi) - \frac{1}{4}\int_0^\pi F(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}\,d\gamma + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{F'(\gamma)\,d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Si l'on suppose non-seulement, comme on l'a fait jusqu'ici, que $F'(\gamma)$ reste finie, d'où résulte la continuité de $\Pi'(\psi)$, mais encore que $\Pi''(0)$ est finie, ou, ce qui revient au même, que la seconde intégrale l'est aussi, alors notre série sera toujours convergente, et l'on pourra facilement en déterminer la somme. En posant, pour abréger,

$$X(\psi) = \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{2\sin\frac{\psi}{2}} = \frac{1}{2} + \cos\psi + \cos 2\psi + \ldots + \cos n\psi,$$

l'expression précédente de la somme des $n+1$ premiers termes devient

$$-\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \Pi(\psi)\,X''(\psi)\,d\psi.$$

En intégrant deux fois de suite par parties, et remarquant que le terme

$\Pi(\psi)X'(\psi) - \Pi'(\psi)X(\psi)$, provenant de cette double opération, est continu et s'évanouit aux deux limites, on obtient l'expression

$$-\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \Pi''(\psi)\frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{2\sin\frac{\psi}{2}}d\psi,$$

qui, par un théorème connu, et lors même que $\Pi''(\psi)$ devient infinie pour une ou plusieurs valeurs de ψ différentes de zéro, converge, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite

$$-\frac{1}{2\pi}\Pi''(0) = -\frac{1}{2\pi}F(0) + \frac{1}{4\pi}F(\pi)$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int_0^\pi F(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}d\gamma - \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \frac{F'(\gamma)\,d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Ajoutant à cette valeur celles des autres séries, calculées dans le premier Mémoire, il vient, pour la densité au point p,

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left[F(\pi) - \int_0^\pi \frac{F'(\gamma)}{\sin\frac{\gamma}{2}}d\gamma\right].$$

Il resterait encore à examiner ce que devient la convergence de la série qui exprime la densité, dans le cas où l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{F'(\gamma)}{\sin\frac{\gamma}{2}}d\gamma,$$

et par suite aussi l'expression que nous venons de trouver pour ρ, conservent toujours des valeurs déterminées et finies, tandis que la fonction $F'(\gamma)$ devient infinie pour une ou plusieurs valeurs de γ différentes de zéro. D'après ce qui précède, la condition de convergence se réduit alors simplement à ce que la fonction $\Pi'(\psi)$, déduite de $F'(\gamma)$, reste finie et continue depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \pi$. Or, en examinant attentivement la manière dont se forme $\Pi'(\psi)$, on voit que, si toutes

les valeurs c pour lesquelles $F'(\gamma)$ devient infinie, sont telles que, pour ε infiniment petit, $F'(c \pm \varepsilon)\sqrt{\varepsilon}$ soit aussi infiniment petit, la continuité de $\Pi'(\psi)$ aura lieu comme dans le cas considéré plus haut, où la fonction $F'(\gamma)$ était toujours finie, et elle entraînera la convergence de la série qui représente la densité ; et qu'au contraire la série est généralement divergente lorsque la condition dont nous venons de parler n'est plus remplie. Bien que la démonstration de ces énoncés n'offre aucune difficulté sérieuse, sa longueur et le peu d'intérêt qu'elle offre m'empêchent de la présenter ici. Il suffit, pour pouvoir faire usage de la série avec sécurité, de connaître, d'après ce qui précède, les cas qui peuvent *seuls* lui faire perdre sa convergence. Nous trouverons d'ailleurs plus loin l'occasion de montrer sur un exemple extrêmement simple un cas réel de divergence de l'espèce de ceux que nous venons de signaler.

§ II.

Les raisonnements par lesquels nous avons établi l'expression finie de ρ dans l'article précédent, n'étant plus applicables lorsque la série cesse d'être convergente, il faut donner une démonstration de cette formule qui convienne à tous les cas.

D'après une proposition connue, le quotient différentiel $\frac{dv}{dr}$, en y considérant θ et φ comme constants et r comme tendant vers l'unité, converge vers deux limites différentes, suivant que l'on y suppose r constamment < 1 ou constamment > 1. Désignons respectivement par K et L ces deux limites; la densité au point correspondant de la surface sera déterminée par l'équation

$$\rho = \frac{1}{4\pi}(K - L).$$

Les limites K, L et la valeur V du potentiel sur la surface sont liées par une relation simple qui permet de se borner à la recherche d'une seule de ces limites. Soient, en effet, v et v_1 les potentiels pour deux points situés sur le même rayon vecteur, et dont les distances r, r_1 au centre satisfont à l'équation

$$rr_1 = 1.$$

Il est facile de voir que l'on a

$$v_1 = \frac{1}{r_1} v,$$

et, par suite,

$$\frac{dv_1}{dr_1} = -\frac{1}{r_1^2} v + \frac{1}{r_1} \cdot \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dr_1} = -\frac{1}{r_1^2} v - \frac{1}{r_1^3} \cdot \frac{dv}{dr},$$

d'où il résulte

$$L = -V - K \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{4\pi}(V + 2K).$$

Il suffit, pour déterminer K, d'avoir égard à la formule qui donne v pour un point intérieur :

$$v = \frac{(1 - r^2)}{4\pi} \int\int \frac{f(\theta', \varphi') \sin\theta' d\theta' d\varphi'}{(1 - 2r\cos\omega + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

formule que l'on peut aisément démontrer sans se servir du développement en série. Pour cela, on remarquera seulement que cette expression, lorsque r y converge vers sa limite supérieure 1, se change, d'après une proposition bien connue, en

$$f(\theta, \varphi) = V,$$

et qu'elle satisfait d'autre part à l'équation aux différentielles partielles que Laplace a le premier démontrée pour v; car l'expression

$$\frac{(1 - r^2)}{(1 - 2r\cos\omega + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

considérée comme fonction des coordonnées polaires r, θ, φ, est une intégrale particulière de cette équation. Dans le cas où $\theta = 0$, en écrivant alors γ au lieu de θ', et conservant les notations ci-dessus, l'expression prendra cette forme simple,

$$v = \frac{1}{2}(1 - r^2) \int_0^\pi \frac{F(\gamma) \sin\gamma d\gamma}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on différentiait l'expression sous cette forme, il serait difficile de déterminer la valeur limite de $\frac{dv}{dr}$; mais on y réussit en lui faisant subir d'abord une intégration par parties, ce qui donne

$$2v = \left(\frac{1}{r} + 1\right) F(0) - \left(\frac{1}{r} - 1\right) F(\pi) + \left(\frac{1}{r} - r\right) \int_0^\pi \frac{F'(\gamma)\, d\gamma}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant le passage à la limite, après la différentiation, n'offre plus aucune difficulté, et l'on obtient pour résultat

$$K = -\frac{1}{2} F(0) + \frac{1}{2} F(\pi) - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{F'(\gamma)}{\sin\frac{\gamma}{2}}\, d\gamma.$$

Par conséquent, en remarquant que, pour le point p, $V = F(0)$, on a l'équation

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left[F(\pi) - \int_0^\pi \frac{F'(\gamma)}{\sin\frac{\gamma}{2}}\, d\gamma\right],$$

qui s'accorde avec celle que nous avions déduite du développement en série.

§ III.

En étendant à un point quelconque m le résultat que l'on vient de trouver pour le point correspondant à $\theta = 0$, on trouve, pour déterminer la densité, la règle suivante :

On cherchera, par une première intégration, la valeur moyenne du potentiel donné V, pour un cercle décrit sur la surface, du point m comme pôle, avec un rayon sphérique arbitraire λ. Si l'on désigne cette valeur moyenne par $\varphi(\lambda)$, la densité cherchée ρ sera donnée par l'équation

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left[\varphi(\pi) - \int_0^\pi \frac{\varphi'(\lambda)}{\sin\frac{\lambda}{2}}\, d\lambda\right].$$

On peut encore remarquer que, d'après la définition de la fonction $\varphi(\lambda)$, la valeur particulière $\varphi(\pi)$ n'est autre chose que la valeur du potentiel pour le point diamétralement opposé au point m; et il est presque inutile d'ajouter que la fonction $\varphi(\lambda)$ aura des valeurs différentes pour les différentes positions du point m, ou, en d'autres termes, que $\varphi(\lambda)$ contiendra, outre λ, les deux coordonnées qui déterminent la position du point m sur la surface.

Mais il n'est peut-être pas superflu d'avertir d'une erreur dans laquelle on peut facilement tomber si l'on n'examine pas d'assez près le résultat que nous venons d'énoncer. Le diviseur qui entre sous le signe d'intégration s'évanouissant à la limite inférieure, on est tenté de croire, au premier abord, que l'intégrale ne reste finie que pour des positions particulières du point m, et qu'elle est en général infinie, tandis que c'est précisément le contraire qui a lieu. D'abord il est aisé de voir, à cause de la continuité de $\varphi(\lambda)$, que la partie de l'intégrale qui s'étend depuis une valeur positive δ, aussi petite qu'on voudra, de la variable jusqu'à la limite supérieure π, reste toujours finie et déterminée, quand même $\varphi'(\lambda)$ deviendrait infini un nombre quelconque de fois dans cet intervalle. Mais il en est de même aussi (les cas singuliers exceptés) pour la partie de l'intégrale qui s'étend de o à δ: cela résulte de ce que, pour de petites valeurs de λ, $\varphi'(\lambda)$ est en général du premier ordre, comme le dénominateur. Si l'on met la valeur V du potentiel sous la forme d'une fonction $\chi(\lambda, \psi)$ des coordonnées polaires sphériques λ, ψ, dont le point m est le pôle, auquel cas

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi(\lambda, \psi)\, d\psi,$$

la propriété dont nous parlons ne se manifeste pas, par la raison que la fonction $\chi(\lambda, \psi)$ n'est pas entièrement arbitraire, mais qu'elle est assujettie aux deux conditions particulières suivantes, d'être périodique par rapport à θ, et de devenir indépendante de ψ lorsqu'on y fait $\lambda = 0$. On peut, au contraire, se convaincre sans peine de la vérité de notre assertion en projetant la surface sphérique sur un plan quelconque, dont les points soient rapportés à deux axes rectangulaires, que nous appellerons axes des t et des u, et en exprimant alors la valeur de V

en chaque point au moyen des coordonnées t, u de la projection de ce point. Ce mode de représentation a sans doute l'inconvénient que, pour représenter la surface tout entière, il faut considérer deux fonctions de t et de u; mais cet inconvénient disparaît dans la question actuelle, où l'on ne doit considérer qu'une portion de surface infiniment petite renfermant le point m. Prenons le plan tangent en m pour plan de projection, m pour origine des coordonnées, et posons

$$V = \chi(t, u).$$

Cette nouvelle fonction ne sera plus assujettie à d'autres conditions qu'à celle de la continuité. Comme on peut évidemment faire maintenant

$$t = \sin\lambda \cos\psi, \qquad u = \sin\lambda \sin\psi,$$

$\varphi(\lambda)$ va prendre la forme

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi(\sin\lambda\cos\psi, \sin\lambda\sin\psi)\, d\psi,$$

et sous cette forme la propriété en question devient évidente, pourvu que d'un autre côté les coefficients différentiels de $\chi(t, u)$, jusqu'au second ordre inclusivement, conservent des valeurs finies lorsqu'on y fera simultanément

$$t = 0, \qquad u = 0.$$

Au reste, pour que ρ reste finie, il n'est pas même nécessaire que $\varphi'(\lambda)$, soit du premier ordre pour de petites valeurs de la variable; il suffit que $\varphi'(\lambda)$ soit du même ordre qu'une puissance positive quelconque de λ.

Le cas où la valeur de ρ, devenant infinie, entraîne la divergence de la série fait connaître ce qui arrivera dans celui où, la densité restant toujours finie, la série cesse cependant de converger. Ce dernier cas est encore moins étendu que le premier, comme on peut aisément s'en convaincre en examinant attentivement les conditions dont il dépend.

§ IV.

Pour donner un exemple simple des cas d'exception que nous avons indiqués, pour lesquels le développement de ρ en série est divergent, nous allons supposer que la valeur V du potentiel est indépendante de l'angle φ, et qu'elle est représentée par $f(\theta)$. On sait que les séries de fonctions sphériques peuvent alors recevoir une forme beaucoup plus simple, et l'on a

$$V = \frac{1}{2}\sum(2n+1)A_n P_n(\cos\theta), \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{8\pi}\sum(2n+1)^2 A_n P_n(\cos\theta),$$

le coefficient général A_n étant donné par la formule

$$A_n = \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

Si l'on pose $f(\theta) = \sqrt{\cos\theta}$ pour toute valeur de $\theta < \frac{\pi}{2}$, et $f(\theta) = 0$ pour θ compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, la condition de la continuité sera satisfaite, et l'on aura à déterminer l'intégrale

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos\theta)\sqrt{\cos\theta}\sin\theta\, d\theta.$$

Le calcul de cette intégrale au moyen des expressions connues de $P_n(\cos\theta)$ ne donnant pas immédiatement le résultat sous sa forme la plus simple, il est préférable d'employer la méthode suivante. En vertu de l'équation

$$\sum P_n(\cos\theta)\,\alpha^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2}},$$

l'intégrale cherchée n'est autre que le coefficient de α^n dans le développement de l'expression

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta}\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2}}.$$

où la fraction $\alpha < 1$ peut être considérée comme positive. En faisant $t = \sqrt{\cos\theta}$ et intégrant, il vient

$$2\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1 - 2\alpha t^2 + \alpha^2}} = \sqrt{\frac{1}{8\alpha^3}}\left[(1+\alpha^2)\arcsin\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}} - (1-\alpha)\sqrt{2\alpha}\right].$$

En posant, pour faciliter le développement, $z = \arcsin\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}}$, et différentiant, on a

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}\sqrt{\frac{1}{2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}} + \alpha^{\frac{1}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{5}{2}} + \ldots\right);$$

d'où, en intégrant, et remarquant que z s'évanouit avec α,

$$\arcsin\sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}} = \sqrt{2}\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}\alpha^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}\alpha^{\frac{7}{2}} + \ldots\right).$$

En substituant cette valeur, on obtient, pour le développement cherché,

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right)\alpha - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right)\alpha^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right)\alpha^3 + \ldots\right],$$

les signes renfermés dans les crochets formant la période à quatre termes $+ - - +$, que l'on peut représenter par $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. On a donc

$$A_n = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{2}{(2n-1).(2n-3)},$$

et les séries ci-dessus prennent la forme suivante :

$$V = -\sum(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{2n+1}{(2n-1).(2n+3)} P_n(\cos\theta),$$

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\sum(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{(2n+1)^2}{(2n-1).(2n+3)} P_n(\cos\theta).$$

D'après ce qui a été remarqué dans l'article précédent, on voit sans difficulté que, dans le cas actuel, le quotient différentiel $\varphi'(\lambda)$ devient infini seulement pour $\lambda = \frac{\pi}{2}$, et cela de telle sorte que la condition énoncée à la fin du § I n'est pas remplie lorsque le point m répond à l'une des valeurs $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, auxquels cas cependant, pour de petites valeurs de λ, $\varphi'(\lambda)$ est de l'ordre λ, et par conséquent ρ conserve des valeurs finies; et qu'en même temps la densité est infinie seulement à l'équateur, c'est-à-dire pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi'(\lambda)$ étant alors de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ pour une petite valeur de λ. Dans ces trois cas, les séries cessent donc d'être convergentes, et il est facile de s'en assurer en remarquant que $P_n(\cos\theta)$, pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, prendra respectivement les valeurs 1 et $(-1)^n$, tandis que, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, il s'évanouit si n est impair, et si n est pair, il devient égal à l'expression $\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}(-1)^{\frac{n}{2}}$, qui est, comme on sait, pour de grandes valeurs de n, de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Dans les deux premiers cas, où ρ conserve une valeur finie et déterminée, la série présente le caractère d'une série oscillante, puisque ses termes, convergeant tous vers la limite 1, sont tels que, sur quatre consécutifs, deux ont le signe $+$ et deux le signe $-$; tandis que, dans le troisième cas, tous les termes sont de même signe, et donnent une somme infinie.

§ V.

Quoique la méthode au moyen de laquelle nous venons de déterminer le coefficient A_n ne soit plus applicable lorsque, tout en continuant à supposer $f(\theta) = 0$ pour la seconde moitié de l'intervalle, on prend dans le premier $f(\theta) = \cos^k\theta$, k désignant une constante positive quelconque; cependant la forme très-simple du résultat trouvé pour la valeur particulière $k = \frac{1}{2}$ permet d'espérer quelque chose d'analogue pour le cas plus général. Comme l'expression la plus simple de A_n ne se présente pas toutefois au premier abord, nous allons

nous arrêter un instant sur la manière de la trouver. Poisson, qui a choisi dans un de ses Mémoires [*] la fonction que nous venons de définir pour exemple de développement en série de fonctions sphériques, laisse au coefficient A_n la forme

$$\frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n}$$

$$\times\left[\frac{1}{k+n+1}-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cdot\frac{1}{k+n-1}+\frac{n(n-1).(n-2).(n-3)}{2.4\ldots(2n-1).(2n-3)}\cdot\frac{1}{k+n-3}-\ldots\right],$$

sous laquelle il se présente de lui-même immédiatement lorsque l'on part, pour le développement, de l'expression ordinaire de $P_n(\cos\theta)$, sans remarquer la simplification considérable dont cette forme est susceptible, et qui n'est réellement pas facile à deviner quand on n'a pas été averti par l'examen d'un cas particulier, comme celui que nous venons de traiter. On est conduit à l'expression la plus simple de A_n par le procédé suivant, très-court, bien qu'il ne soit pas élémentaire.

D'après le § I du premier Mémoire, les deux intégrales

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\frac{\cos n\psi\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\gamma)}}d\psi,\qquad -\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\frac{\sin n\psi\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\gamma)}}d\psi$$

sont respectivement égales aux coefficients de α^n dans les développements des expressions

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1+\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}},\qquad -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}.$$

On en tire par addition

$$P_n(\cos\gamma)=\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\gamma)}}d\psi.$$

Multipliant cette équation par $\cos^k\gamma\sin\gamma d\gamma$, intégrant ensuite depuis $\gamma=0$ jusqu'à $\gamma=\frac{\pi}{2}$, et intervertissant dans le second membre l'ordre

[*] *Connaissance des Temps* pour l'année 1829.

des intégrations, il vient

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi \int_\psi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^k\gamma \sin\gamma}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}\, d\gamma,$$

ou, en introduisant à la place de γ une nouvelle variable t, donnée par l'équation $\cos\gamma = t\cos\psi$, ce qui rend les deux intégrations indépendantes l'une de l'autre,

$$A_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t}}\, dt . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k+\frac{1}{2}}\psi \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi\, d\psi.$$

Or on a, par une formule connue,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\psi \cos q\psi\, d\psi = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-q}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{2^p},$$

la constante p devant être positive, et la transcendante $\Gamma(l)$, quand l'argument l devient négatif, étant déterminée par la relation

$$\Gamma(l+1) = l\Gamma(l),$$

ou, ce qui revient au même, par la définition donnée par Gauss, et qui s'applique indifféremment aux arguments positifs et négatifs. A l'aide de cette formule et de l'expression connue d'une intégrale eulérienne de première espèce au moyen de trois de seconde espèce, notre équation devient

$$A_n = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{k+n+3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k-n+2}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}},$$

ou

$$A_n = \frac{k.(k-1)\ldots(k-n+1)}{\frac{k+n+1}{2}\cdot\left(\frac{k+n+1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{k+n+1}{2}-n\right)}$$
$$\times \frac{\Gamma(k-n+1)}{\Gamma\left(\frac{k-n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k-n+2}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}},$$

ou enfin, en remplaçant le second facteur par sa valeur connue $2^{k-n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

$$A_n = \frac{k.(k-1)\ldots(k-n+1)}{(k+n+1)(k+n-1)\ldots(k-n+1)},$$

où les facteurs du dénominateur vont en diminuant de deux unités.

Il est à peine besoin de faire remarquer que cette expression si simple peut se vérifier avec la plus grande facilité. Il suffit, par exemple, de la décomposer en fractions simples, pour reconnaître qu'elle coïncide avec celle de Poisson. Si l'on ne veut pas employer celle-ci pour cette vérification, on peut se servir de l'équation

$$(n+1)A_{n+1,k} = (2n+1)A_{n,k+1} - nA_{n-1,k},$$

qui résulte immédiatement de la relation qui a lieu entre un groupe quelconque de trois coefficients $P_n(\cos\gamma)$ consécutifs.

Pour simplifier encore davantage l'expression que nous venons de trouver, nous distinguerons deux cas, suivant que n sera pair ou impair. On a respectivement dans ces deux cas :

$$A_n = \frac{k.(k-2)\ldots(k-n+2)}{(k+1)(k+3)\ldots(k+n+1)}, \qquad A_n = \frac{(k-1)(k-3)\ldots(k-n+2)}{(k+2)(k+4)\ldots(k+n+1)}.$$

A l'aide de ces expressions et des formules connues qui donnent les valeurs approchées des factorielles dont le nombre des facteurs est très-grand, on peut se convaincre facilement que le cas particulier examiné ci-dessus, où $k = \frac{1}{2}$, et dans lequel la série est divergente pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$, est précisément le cas limite de la série, et que la divergence cesse dès que k est $> \frac{1}{2}$. Mais il n'en est plus de même pour la valeur $\theta = \frac{\pi}{2}$: dans ce cas, la divergence subsiste, ainsi que la valeur infinie de la densité, tant qu'on ne prend pas $k > 1$.

§ VI.

Nous allons maintenant appliquer encore à un cas particulier l'expression finie que nous avons trouvée pour la densité. Considérons encore V comme une fonction de θ seulement, que nous pourrons mettre sous la forme $f(\cos\theta)$; ρ ne dépendra plus encore que de la distance sphérique θ du point m au pôle p. Sur le cercle décrit du point m comme pôle, avec le rayon sphérique λ, on aura, par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$V = f(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda\cos\psi),$$

ψ désignant l'angle compris entre le rayon quelconque λ et l'arc de grand cercle passant par m et par p. Cette expression ne changeant pas de valeur quand on y remplace ψ par $-\psi$, il suffira de prendre entre les limites $\psi = 0$, $\psi = \pi$ l'intégrale qui exprime la valeur moyenne $\varphi(\lambda)$, et ensuite de la doubler. On a ainsi

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda\cos\psi)\,d\psi.$$

Toutes les fois que $\varphi'(\lambda)$ pourra s'exprimer sans le signe d'intégration, ce qui a lieu lorsque $f(z)$, ou plus généralement $f'(z)$ est une fonction rationnelle de z, alors, soit que la forme de cette fonction reste la même pour tout l'intervalle compris entre $z = -1$ et $z = +1$, soit qu'elle change de telle sorte que la continuité ne soit pas interrompue, ρ pourra se ramener à une intégrale simple, ou même s'exprimer sans le signe d'intégration [*].

---

[*] Dans le cas général où V contient les deux angles θ, φ, la réduction de ρ à une intégrale simple pourra toujours s'effectuer lorsque, en posant

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta\cos\varphi, \qquad z = \sin\theta\sin\varphi,$$

V pourra s'exprimer par une fonction de x, y, z dont les trois coefficients différentiels du premier ordre soient des fonctions rationnelles, entières ou fractionnaires, de x, y, z, la forme de la fonction $f(x, y, z)$ pouvant toujours changer dans les différentes parties de la surface, ce qui constitue un résultat remarquable par sa grande généralité.

Parmi les cas qui se rapportent au cas général précédent, nous ne traiterons que celui où $f(\cos\theta) = \cos\theta$ pour $\theta < \frac{\pi}{2}$, et $f(\cos\theta) = 0$ pour $\theta > \frac{\pi}{2}$. L'intégrale s'étendra seulement à la partie de l'intervalle compris entre $\psi = 0$ et $\psi = \pi$, à l'intérieur de laquelle l'expression

$$\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda\cos\psi$$

a des valeurs positives. Si l'on suppose $\theta < \frac{\pi}{2}$, et il est facile de ramener à ce cas celui où θ serait $> \frac{\pi}{2}$, on trouve simplement, en discutant l'expression précédente que, pour toute valeur de λ inférieure à $\frac{\pi}{2} - \theta$, l'intégrale doit être prise de $\psi = 0$ à $\psi = \pi$; pour toute valeur de λ comprise entre $\frac{\pi}{2} - \theta$ et $\frac{\pi}{2} + \theta$, les limites de l'intégrale sont zéro et l'angle ψ_1, compris entre 0 et π, et déterminé par l'équation

$$\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda\cos\psi_1 = 0;$$

et enfin, pour $\lambda > \frac{\pi}{2} + \theta$, l'intégrale s'évanouit, puisqu'alors l'expression précédente est toujours négative. La fonction $\varphi(\lambda)$ a donc pour valeurs respectives, dans ces trois intervalles,

$$\cos\theta\cos\lambda, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\psi_1}(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda\cos\psi)\,d\psi, \qquad 0;$$

dans la seconde expression, pour abréger le calcul, nous n'effectuerons l'intégration qu'après avoir différentié. Dans cette dernière opération, le terme résultant de la variation de la limite supérieure ψ_1 s'évanouit en vertu de l'équation qui détermine ψ_1, et l'on obtient pour $\varphi'(\lambda)$ les trois expressions

$$-\cos\theta\sin\lambda, \qquad \frac{1}{\pi}(-\psi_1\cos\theta\sin\lambda + \sin\psi_1\sin\theta\cos\lambda), \qquad 0,$$

à la simple inspection desquelles on peut se convaincre qu'au moins tant que m reste sur l'hémisphère pour lequel ces expressions ont été calculées, $\varphi'(\lambda)$ ne deviendra pas infinie, et que cette fonction sera du premier ordre pour une petite valeur de λ, auquel cas c'est la première forme qu'il faut prendre. Il n'y a d'exception sous ce rapport que pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: alors les deux intervalles extremes s'évanouissent, et $\varphi'(\lambda)$ a généralement pour expression $\frac{1}{\pi}\cos\lambda$, quantité de l'ordre zéro pour de petites valeurs de λ, de sorte que la densité devient infinie à l'équateur.

D'après l'expression trouvée pour $\varphi'(\lambda)$, l'intégrale que contient l'expression générale de ρ se partage en deux autres, qui ont pour limites, l'une o et $\frac{\pi}{2} - \theta$, l'autre $\frac{\pi}{2} - \theta$ et $\frac{\pi}{2} + \theta$, et dont la premiere a la valeur très-simple

$$-4\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

La seconde, composée elle-même de deux parties, est, abstraction faite des limites,

$$\frac{\sin\theta}{\pi}\int\frac{\sin\psi_1\cos\lambda}{\sin\frac{\lambda}{2}}\,d\lambda - \frac{2\cos\theta}{\pi}\int\psi_1\cos\frac{\lambda}{2}\,d\lambda;$$

en intégrant le dernier terme par parties, elle prend la forme

$$\frac{\sin\theta}{\pi}\int\frac{\sin\psi_1\cos\lambda}{\sin\frac{\lambda}{2}}\,d\lambda + \frac{4\cos\theta}{\pi}\int\frac{d\psi_1}{d\lambda}\sin\frac{\lambda}{2}\,d\lambda - \frac{4}{\pi}\psi_1\cos\theta\sin\frac{\lambda}{2}.$$

En remarquant que, d'après l'équation qui détermine ψ_1, on a respectivement aux deux limites $\psi_1 = \pi$ et $\psi_1 = 0$, on trouve, en passant aux limites, pour le terme dégagé du signe $\int$, une valeur égale et de signe contraire à celle qu'on a trouvée pour la première intégrale. Il ne reste donc que les deux premiers termes, qui, en y substituant les valeurs

suivantes, tirées de l'équation qui donne ψ_1,

$$\sin\psi_1 = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\lambda}}{\sin\theta\sin\lambda}, \qquad \frac{d\psi_1}{d\lambda} = -\frac{\cos\theta}{\sin\lambda}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\lambda}},$$

prennent la forme

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda\sin\frac{\lambda}{2}}\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\lambda}\,.\,d\lambda - \frac{4\cos^2\theta}{\pi}\int\frac{\sin\frac{\lambda}{2}}{\sin\lambda}\,.\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\lambda}},$$

ou les intégrales doivent être prises depuis $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ jusqu'à $\lambda = \frac{\pi}{2} + \theta$. En introduisant une nouvelle variable

$$z = \frac{\cos\lambda}{\cos\theta},$$

les limites des intégrales deviennent $+1$ et -1, ou, en changeant les signes et en même temps l'ordre des limites, -1 et $+1$; et l'on a, en substituant dans l'expression de ρ, et remarquant en même temps que $\varphi(\pi) = 0$,

$$\rho = \frac{1}{\pi^2 . 2\sqrt{2}}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{2 - z\sin\theta}{1 - z^2\sin^2\theta}\cos^2\theta - z\sin\theta\right)\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2).(1 - z\sin\theta)}}.$$

Ce résultat semble renfermer un terme dépendant des intégrales elliptiques de troisième espèce. Mais comme les limites sont deux valeurs consécutives parmi celles qui font évanouir le radical, l'expression, ramenée à la forme habituelle, ne contiendra plus que des intégrales elliptiques *complètes* [*], et par conséquent, en vertu d'un beau théorème dû à Legendre, on pourra la ramener aux intégrales de première et de seconde espèce.

Faisons voir encore, en terminant cet article, comment le cas de notre problème, traité dans le Mémoire cité plus haut, et relatif à une surface peu différente de la sphère, peut être ramené au cas de la sphère sans le secours du développement en séries.

---

[*] *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, auct. C.-G.-J. Jacobi, page 14.

Soit $r = 1 + \gamma z$ l'équation de la surface, γ désignant une constante très-petite, dont on néglige les puissances supérieures, et z une fonction de θ et de φ. Si l'on convient de marquer d'un accent la valeur que prend une fonction des quantités θ, φ, lorsqu'on y remplace ces quantités par θ', φ', et si l'on désigne par ds' l'élément de surface correspondant aux coordonnées θ', φ', et par p la distance des points qui ont pour coordonnées respectives θ et φ, θ' et φ', le problème exige que l'équation

$$V = \int \frac{\rho' ds'}{p},$$

où la double intégration s'étend à toute la surface, c'est-à-dire depuis $\theta' = 0$, $\varphi' = 0$ jusqu'à $\theta' = \pi$, $\varphi' = 2\pi$, soit satisfaite pour toutes les valeurs de θ, φ comprises dans les mêmes limites. Soit $d\sigma'$ l'élément de la surface sphérique correspondant à l'élément ds' et dont le contour est tracé par les mêmes rayons vecteurs, et soit q la distance des points de la sphère qui ont pour coordonnées respectives θ et φ, θ' et φ'. On trouve de suite, par des considérations géométriques très-simples,

$$ds' = (1 + 2\gamma z')\, d\sigma', \qquad p = q\left[1 + \tfrac{1}{2}\gamma(z + z')\right].$$

Par la substitution de ces expressions, notre équation devient

$$V = \int \rho' \left[1 + \gamma\left(\frac{3}{2} z' - \frac{1}{2} z\right)\right] \frac{d\sigma'}{q},$$

ou

$$V + \frac{1}{2}\gamma z \int \frac{\rho' d\sigma'}{q} = \int \rho' \left(1 + \frac{3}{2}\gamma z'\right) \frac{d\sigma'}{q}.$$

D'après l'avant-dernière équation, l'intégrale multipliée par γ dans la dernière équation ne diffère de V que d'une quantité de l'ordre γ; on peut donc remplacer cette intégrale par V, ce qui donne

$$\left(1 + \frac{1}{2}\gamma z\right) V = \int \rho' \left(1 + \frac{3}{2}\gamma z'\right) \frac{d\sigma'}{q},$$

et par cette équation le problème est ramené au cas de la sphère. On

voit qu'il faudra considérer le produit de la valeur donnée du potentiel par $1 + \frac{1}{2}\gamma z$ comme la valeur correspondante à la sphère, puis diviser par $1 + \frac{3}{2}\gamma z$ la densité déterminée d'après cette hypothèse.

NOTE

SUR

L'ATTRACTION DES PARABOLOIDES ELLIPTIQUES;

PAR M. J. BOURGET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

On sait avec quelle élégance M. Chasles a résolu le problème de l'attraction des ellipsoïdes en se servant des propriétés des *points correspondants*, introduits par Ivory dans cette question. Je vais montrer que cette solution peut être facilement appliquée à l'attraction d'une couche de matière homogène comprise entre deux paraboloïdes.

Plusieurs théorèmes de cette Note se vérifient exactement comme leurs analogues du Mémoire de M. Chasles. Je me bornerai à les énoncer.

I.

Soit un paraboloïde elliptique A, soient S son sommet, et Sx son axe principal. Si tous les points décrivent des droites parallèles à l'axe, et par suite égales entre elles, le paraboloïde primitif se transporte dans une nouvelle position. En le comparant au premier, je l'appellerai *isothétique*. La distance ω des sommets sera la distance des paraboloïdes.

Soit O l'origine des coordonnées rectangulaires sur l'axe principal; si les plans xy, xz sont *principaux*, l'équation d'un paraboloïde sera

$$(1) \qquad x + \varepsilon = \frac{y^2}{2p + 4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q + 4\varepsilon},$$

en désignant par

$$\frac{p}{2}, \quad \frac{q}{2}$$

les distances à l'origine des deux foyers des paraboles principales obtenues en faisant dans l'équation (1) successivement

$$z = 0, \quad y = 0.$$

Si nous faisons varier ε, nous aurons une suite de paraboloïdes que nous appellerons *homofocaux*. Celui dont le sommet est à l'origine aura pour équation

$$(2) \qquad x = \frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q},$$

et tant que ε varie positivement, les autres lui sont extérieurs.

Soient actuellement

$$x, \ y, \ z, \quad x', \ y' \ z'$$

les coordonnées de deux points de l'espace, liées par les équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x + \varepsilon = x' + \varepsilon' \\ & \frac{y}{\sqrt{2p + 4\varepsilon}} = \frac{y'}{\sqrt{2p + 4\varepsilon'}}, \\ & \frac{z}{\sqrt{2q + 4\varepsilon}} = \frac{z'}{\sqrt{2q + 4\varepsilon'}}. \end{aligned} \right.$$

Nous nommerons ces deux points *correspondants*. A une surface quelconque correspond ainsi une autre surface.

Théorème I. — *A deux paraboloïdes isothétiques correspondent deux autres paraboloïdes isothétiques.*

En effet, soient deux paraboloïdes isothétiques A et B, soit ω leur distance; ils auront respectivement pour équations

$$(A) \qquad x + \varepsilon = \frac{y^2}{2p + 4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q + 4\varepsilon}.$$

$$(B) \qquad x + \varepsilon - \omega = \frac{y^2}{2p + 4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q + 4\varepsilon}.$$

En vertu des formules (3), à ces deux surfaces correspondront

$$(A') \qquad x' + \varepsilon' = \frac{y'^2}{2p + 4\varepsilon'} + \frac{z'^2}{2q + 4\varepsilon'},$$

$$(B') \qquad x' + \varepsilon' - \omega = \frac{y'^2}{2p + 4\varepsilon'} + \frac{z'^2}{2q + 4\varepsilon'}:$$

ce qui démontre le théorème énoncé. On voit encore que le paraboloïde correspondant est homofocal, et que la distance des paraboloïdes A′ et B′ est la même que celle des surfaces A et B.

Il y a plus : chaque point de la première couche a son correspondant dans la seconde ; nous désignerons ces couches par les lettres C, C′.

Théorème II. — *Soient* A *et* A′ *deux paraboloïdes correspondants ou homofocaux,* S *et* S′ *deux points quelconques sur* A, *m et m′ leurs correspondants sur* A′ : *on a*

$$Sm' = S'm.$$

Théorème III. — *Soient* A *et* B *deux paraboloïdes isothétiques : les deux parties d'une sécante quelconque comprises dans la couche sont égales entre elles.*

Théorème IV. — *Si dans deux couches correspondantes* C *et* C′ *on prend deux portions de volume correspondantes* φ *et* φ', *on a*

$$\varphi : \varphi' :: \sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)} : \sqrt{(2p + 4\varepsilon')(2q + 4\varepsilon')}.$$

En effet, des relations (3) on tire

$$dx = dx',$$
$$\frac{dy}{\sqrt{2p + 4\varepsilon}} = \frac{dy'}{\sqrt{2p + 4\varepsilon'}},$$
$$\frac{dz}{\sqrt{2q + 4\varepsilon}} = \frac{dy'}{\sqrt{2q + 4\varepsilon'}},$$

par suite,

$$dx\,dy\,dz : dx'\,dy'\,dz' :: \sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)} : \sqrt{(2p + 4\varepsilon')(2q + 4\varepsilon')}.$$

De là on déduit le théorème énoncé, par une sommation d'éléments correspondants.

Théorème V. — *Soient* C, C′ *deux couches homogènes correspondantes comprises chacune entre deux paraboloïdes isothétiques infiniment voisins. Soient* V *le potentiel de la couche* C *par rapport à un point*

S' pris sur la surface externe de C', *et* V' *le potentiel de* C' *par rapport au point* S *correspondant de* S' *sur la surface externe de* C : *on aura*

$$V : V' :: \sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)} : \sqrt{(2p + 4\varepsilon')(2q + 4\varepsilon')}.$$

J'appelle avec Gauss *potentiel d'un corps par rapport à un point*, la somme de tous les résultats qu'on obtient en divisant chacun des éléments de volume du corps par sa distance au point.

Théorème VI. — *Le potentiel d'une couche infiniment mince par rapport à un point intérieur est constant, quel que soit ce point.*

Théorème VII. — *Les potentiels des deux couches* C *et* C' *relatifs à un même point extérieur sont entre eux dans le rapport*

$$\sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)} : \sqrt{(2p + 4\varepsilon')(2q + 4\varepsilon')}.$$

Théorème VIII. — *Les composantes de l'attraction d'un corps sur un point* S (α, β, γ) *sont les dérivées du potentiel par rapport aux coordonnées du point* S, *multipliées par la densité du corps homogène, la masse* μ *du point* S *et l'action* f *de l'unité de masse à l'unité de distance.*

Ce théorème général est bien connu.

Théorème IX. — *Une couche homogène comprise entre deux paraboloïdes isothétiques infiniment voisins, n'exerce aucune action sur un point intérieur.*

Ce théorème résulte immédiatement des théorèmes VIII et VI. Il serait vrai pour une couche finie hétérogène, décomposable en couches homogènes infiniment minces.

Théorème X. — *L'attraction d'une couche infiniment mince comprise entre deux paraboloïdes isothétiques, sur un point extérieur, est dirigée suivant la normale au paraboloïde passant par ce point, et correspondant à la surface externe de la couche attirante.*

Ce théorème est encore vrai, si le point est sur la surface extérieure de la couche attirante.

Théorème XI. — *Soient* C *et* C' *deux couches correspondantes, et* S

un point extérieur : leurs actions sur ce point sont dans le rapport

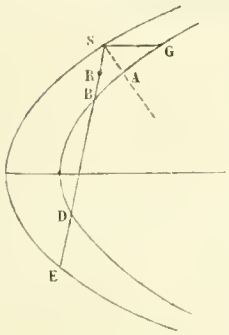
$$\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)} : \sqrt{(2p+4\varepsilon')(2q+4\varepsilon')}.$$

Les composantes homologues des actions totales sont aussi dans le même rapport. Ce théorème ramène la recherche de l'attraction d'une couche infiniment mince sur un point extérieur, à celle d'une couche de même matière correspondante, et dont la surface externe passe par le point.

II.

Problème I. — *Trouver l'attraction sur un point de sa surface externe d'une couche paraboloïdale infiniment mince, comprise entre deux paraboloïdes isothétiques.*

Soit ω la distance des deux paraboloïdes. Menons par le point S la ligne SA perpendiculaire à la surface externe; cette ligne sera aussi normale à la surface interne infiniment voisine. Menons $SG = \omega$ parallèle à l'axe. Soit μ la masse du point S.



Pour trouver l'action de la couche sur S, j'imagine que ce point soit le sommet de cônes infiniment petits d'ouverture, interceptant sur une sphère de rayon 1, décrite du point S, une portion σ de surface infiniment petite par rapport à SA. Soit SBDE la génératrice de l'un de ces cônes : appelons r la distance SR. L'élément de volume de ce cône en R sera

$$r^2 \sigma dr;$$

son action sur S sera

$$\mu f \rho \sigma dr,$$

ρ désignant la densité de la couche, et f l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance. Nous aurons l'action totale de la masse interceptée dans le cône en intégrant par rapport à r de o à SB, puis de SD à SE; mais SB = DE, donc le résultat de cette opération sera

$$2 \mu f \rho \sigma . \overline{SB}.$$

Nous avons prouvé que l'action totale F est dirigée suivant SA, donc il nous suffit de considérer suivant cette ligne la composante de l'action précédente. Elle est

$$2\mu f\rho\sigma . SB \cos B\hat{S}A,$$

ou

$$2\mu f\rho\sigma . SA.$$

L'action totale s'obtiendra en intégrant par rapport à tous les éléments σ, ce qui donne la demi-sphère 2π, et par suite

$$F = 4\pi\mu f\rho . \overline{SA}.$$

Le triangle rectangle SAG donne

$$SA = \omega . \cos ASG,$$

et ASG est l'angle de la normale avec l'axe des x; donc enfin

$$(4) \qquad F = \frac{4\pi\mu f\rho\omega}{\sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{(2p+4\varepsilon)^2} + \frac{4\gamma^2}{(2q+4\varepsilon)^2}}}:$$

α, β, γ sont les coordonnées du point S, pris sur la surface dont ε est le paramètre.

Problème 2. — *Trouver l'attraction d'une couche paraboloïdale sur un point extérieur.*

Soit C la couche attirante comprise entre deux paraboloïdes isothétiques infiniment voisins A et B; soit S′ le point attiré dont la masse est μ, et dont les coordonnées sont α, β, γ. Par ce point, faisons passer un paraboloïde A′ correspondant à A, et qui soit la surface externe d'une couche C′ correspondante à la couche C. Soit F′ l'attraction qu'elle exerce sur S′, et F l'attraction que C exerce sur ce même point. Ces deux forces ont la même direction; d'ailleurs, d'après le théorème XI, si les paraboloïdes externes A et A′ ont pour équations

$$(A) \qquad x - k = \frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q},$$

$$(A') \qquad x - k + \varepsilon = \frac{y^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q+4\varepsilon},$$

ε étant déterminé par l'équation

$$(5) \qquad \alpha - k + \varepsilon = \frac{\beta^2}{2p + 4\varepsilon} + \frac{\gamma^2}{2q + 4\varepsilon},$$

on a

$$F : F' :: \sqrt{4pq} : \sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)},$$

donc

$$F = \frac{F' \sqrt{4pq}}{\sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)}}:$$

d'ailleurs

$$F' = \frac{4\pi\mu f \rho\omega}{\sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{(2p + 4\varepsilon)^2} + \frac{4\gamma^2}{(2q + 4\varepsilon)^2}}}:$$

donc enfin l'attraction de la couche C sur le point S′ est donnée par

$$(6) \qquad F = \frac{4\pi\mu f \rho\omega \sqrt{4pq}}{\sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)} \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{(2p + 4\varepsilon)^2} + \frac{4\gamma^2}{(2q + 4\varepsilon)^2}}}.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$(7) \qquad \varpi = 1 + \frac{4\beta^2}{(2p + 4\varepsilon)^2} + \frac{4\gamma^2}{(2q + 4\varepsilon)^2}:$$

donc

$$(8) \qquad F = \frac{4\pi\mu f \rho\omega \sqrt{4pq}}{\sqrt{\varpi} \sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)}}.$$

Cette force est normale au paraboloïde A′; donc, en cherchant les cosinus des angles l, m, n que la normale fait avec les axes, nous aurons les cosinus des angles de cette force avec les axes. Or

$$\frac{\cos l}{-1} = \frac{\cos m}{\frac{2\beta}{2p + 4\varepsilon}} = \frac{\cos n}{\frac{2\gamma}{2q + 4\varepsilon}} = \frac{-1}{\sqrt{\varpi}}.$$

De là nous concluons immédiatement pour les composantes X, Y, Z de

la force F :

$$(9)\quad \begin{cases} X = \dfrac{4\pi\rho\mu f\omega\sqrt{4pq}}{\varpi\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}, \\[2ex] Y = -\dfrac{8\pi\rho\mu f\omega\beta\sqrt{4pq}}{\varpi(2p+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}, \\[2ex] Z = -\dfrac{8\pi\rho\mu f\omega\gamma\sqrt{4pq}}{\varpi(2q+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}. \end{cases}$$

Remarque. — Nous pouvons donner à ces composantes une autre forme. En vertu de l'équation

$$\alpha - k + \varepsilon = \frac{\beta^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{\gamma^2}{2q+4\varepsilon},$$

k et ε sont fonctions l'un de l'autre. Faisons varier k de ω, ε variera de $d\varepsilon$, et l'on aura

$$\varpi\, d\varepsilon = \omega;$$

donc, en remplaçant ω par cette valeur dans les équations (9), elles deviendront

$$(10)\quad \begin{cases} X = \dfrac{4\pi\rho\mu f\sqrt{4pq}}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}\, d\varepsilon, \\[2ex] Y = -\dfrac{8\pi\rho\mu f\beta\sqrt{2pq}}{(2p+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}\, d\varepsilon, \\[2ex] Z = -\dfrac{8\pi\rho\mu f\gamma\sqrt{4pq}}{(2q+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}\, d\varepsilon. \end{cases}$$

Problème 5. — *Trouver l'attraction sur un point extérieur d'une couche finie comprise entre deux paraboloïdes isothétiques et formée de couches isothétiques homogènes.*

Supposons la densité ρ une fonction quelconque de k donnée par

$$(11)\qquad \rho = F(k) = F\left(\alpha + \varepsilon - \frac{\beta^2}{2p+4\varepsilon} - \frac{\gamma^2}{2q+4\varepsilon}\right),$$

et intégrons les composantes (10) depuis la valeur ε_0 qui correspond à $k = 0$, et qui est donnée par

$$(12) \qquad \alpha + \varepsilon_0 = \frac{\beta^2}{2p + 4\varepsilon_0} + \frac{\gamma^2}{2q + 4\varepsilon_0},$$

jusqu'à une autre valeur de ε, correspondante à la dernière valeur de k. Les composantes de l'attraction totale seront

$$U = \quad 4\pi\mu f\sqrt{4pq}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}\frac{\rho\, d\varepsilon}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}},$$

$$V = -8\pi\mu f\beta\sqrt{4pq}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}\frac{\rho\, d\varepsilon}{(2p+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}},$$

$$W = -8\pi\mu f\gamma\sqrt{4pq}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}\frac{\rho\, d\varepsilon}{(2q+4\varepsilon)\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}}.$$

On voit que, dans le cas d'une couche homogène, ces quadratures ne dépendent pas des fonctions elliptiques et peuvent s'effectuer.

III.

La question de l'attraction des paraboloïdes elliptiques est entièrement résolue par les formules qui précèdent; mais on peut se proposer de trouver le potentiel d'une couche infiniment mince relativement à un point extérieur. On arrive alors aux théorèmes suivants :

Théorème XII. — *Le potentiel d'une couche infiniment mince formée par deux paraboloïdes isothétiques relativement à un point extérieur est infini.*

Ce théorème se vérifie aisément.

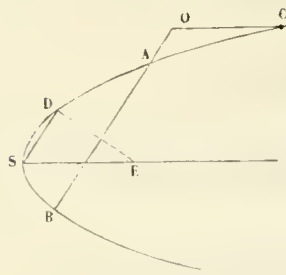
Bien que $V = \infty$, les diviseurs n'en représentent pas moins les composantes de l'attraction (Duhamel, *Traité de Mécanique*).

Théorème XIII. — *Le potentiel d'une couche infiniment mince formée par deux paraboloïdes isothétiques relativement à un point intérieur, dépend d'une transcendante elliptique de première espèce.*

On peut aussi aborder le problème de l'attraction d'une couche pa-

raboloïdale en suivant une marche analogue à celle que M. Chasles a suivie pour les ellipsoïdes dans un Mémoire inséré au *Journal de l'École Polytechnique*. C'est ce que j'ai montré dans une Thèse présentée à la Faculté de Paris en 1852. Le théorème fondamental de cette autre théorie est le suivant, que je crois nouveau :

THÉORÈME XIV. — *Par un point* O, *menons une sécante* OAB *à un paraboloïde; par le sommet* S *imaginons une parallèle* SD; *par son extrémité* D, *menons un plan perpendiculaire à* SD, *qui rencontre l'axe en* E; *menons enfin par le point* O *une parallèle à l'axe qui rencontre en* C *le paraboloïde.*



Nous aurons

$$OA \,.\, OB = OC \,.\, SE \; [*].$$

[*] Si l'on suppose un hyperboloïde à deux nappes agissant sur un point matériel de manière à l'attirer par une de ses nappes et à le repousser par l'autre suivant la loi newtonienne, on étendra plus facilement encore à ce système les théorèmes de M. Chasles.

DÉTERMINATION

DU PENTAÈDRE DE VOLUME DONNÉ,

DONT LA SURFACE EST UN MINIMUM;

PAR M. C.-G. SUCKSDORFF.

Nous nous proposons de donner ici la solution du problème suivant :

Entre tous les pentaèdres de même volume, trouver celui qui a la moindre surface.

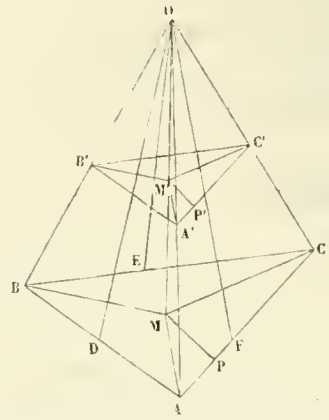
On ne laissera de côté aucun pentaèdre, en considérant les pyramides quadrangulaires et les troncs de pyramides triangulaires : bien entendu que nous appelons tronc de pyramide tout solide qui reste lorsque, d'une pyramide quelconque, on retranche la partie supérieure par un plan quelconque qui ne coupe ni ne touche la base de la pyramide.

La pyramide quadrangulaire, qui, à volume égal, offre une surface moindre que les autres figures de la même espèce, est bien connue, et l'on trouve, en exprimant sa surface S′ par son volume V,

$$S' = 2\sqrt[3]{36\,V^2}.$$

Admettons maintenant qu'on parvienne à trouver aussi un tronc de pyramide triangulaire dont la surface soit moindre que celles des autres solides du même genre, à volume égal : le problème proposé plus haut sera dès lors facilement résolu, car il ne restera qu'à comparer la surface de ce tronc à celle de la pyramide dont nous avons parlé tout à l'heure, les volumes étant supposés égaux. C'est à la plus petite des deux qu'appartiendra la propriété du minimum entre toutes les surfaces de pentaèdres.

Pour trouver ce tronc, cherchons d'abord des expressions convenables pour le volume, pour la base et pour la surface latérale d'une pyramide triangulaire quelconque; et pour cela supposons que la droite OM, qui perce au point M la base ABC de la pyramide O.ABC, soit l'axe d'un cône ordinaire, tangent aux faces AOB, BOC, COA de la même pyramide suivant les droites OD, OE, OF. Soit MP la trace, sur le triangle ABC, du plan OMP mené par OM perpendiculairement au plan de ce triangle. De plus nous admettons que, par OM et chacun des points A, D, B, E, C et F, des plans soient menés. Les plans DOM, EOM, FOM sont perpendiculaires aux plans des triangles respectifs AOB, BOC, COA; et les angles dièdres F.OM.D, D.OM.E, E.OM.F, que nous désignerons respectivement par 2τ, $2\tau'$, $2\tau''$, sont divisés en parties égales par les plans AOM, BOM, COM.



Si l'on donne τ, τ' et τ'', qui au reste doivent satisfaire à la condition

$$(1) \qquad \tau + \tau' + \tau'' = 180^\circ,$$

et que de plus l'angle DOM = EOM = FOM = φ soit connu, l'angle trièdre O.ABC est déterminé. Ensuite, on pourra fixer la position de la base ABC par OM = c, par l'angle OMP = ψ, que nous supposons ne pas surpasser 90 degrés, et enfin par l'angle γ des plans OMP et OMA.

Si l'on pose

$$AM = a, \quad BM = a', \quad CM = a'',$$

$$\text{angle } AMO = A, \quad \text{angle } BMO = A', \quad \text{angle } CMO = A'',$$

et qu'on applique une formule bien connue aux pyramides M.AOB, M.BOC et M.COA dont est composée la pyramide O.ABC, on trouve d'abord pour le volume V' de la même pyramide

$$V' = \frac{1}{6}[aa'c \sin A \sin A' \sin \tau'' + a'a''c \sin A' \sin A'' \sin \tau + a''ac \sin A'' \sin A \sin \tau'];$$

mais il est facile d'introduire dans cette formule, au lieu de a, a', a'', A, A′ et A″, les quantités dont nous nous sommes servi pour la détermination de la pyramide, car si nous appelons α, α' et α'' les angles respectifs AOM, BOM et COM, nous tirons des triangles AOM, BOM, COM,

$$a = \frac{c}{\cot\alpha + \cot A}\,\frac{1}{\sin A},\quad a' = \frac{c}{\cot\alpha' + \cot A'}\,\frac{1}{\sin A'},\quad a'' = \frac{c}{\cot\alpha'' + \cot A''}\,\frac{1}{\sin A''},$$

et des angles trièdres O.ADM, O.BEM, O.CFM,

$$\cot\alpha = \cos\tau\cot\varphi,\quad \cot\alpha' = \cos\tau'\cot\varphi,\quad \cot\alpha'' = \cos\tau''\cot\varphi.$$

De plus, les angles trièdres M.APO, M.PBO, M.CPO nous donnent

$$\cot A = \cos\gamma\cot\psi,\quad \cot A' = \cos\gamma'\cot\psi,\quad \cot A'' = \cos\gamma''\cot\psi,$$

en faisant

$$(2)\qquad \gamma' = 180^\circ - \tau'' + \gamma,\quad \gamma'' = 180^\circ + \tau' + \gamma.$$

On voit maintenant comment on arrivera au but. L'élimination faite, on trouve, en ayant égard aux relations

$$\sin\tau\cos\tau + \sin\tau'\cos\tau' + \sin\tau''\cos\tau'' = 2\sin\tau\sin\tau'\sin\tau'',$$

$$\cos\gamma\sin\tau + \cos\gamma'\sin\tau' + \cos\gamma''\sin\tau'' = 0,$$

conséquences des équations (1) et (2)

$$(3)\qquad V' = \frac{c^3\cot\varphi\sin\tau\sin\tau'\sin\tau''}{3(\cos\tau\cot\varphi + \cos\gamma\cot\psi)(\cos\tau'\cot\varphi + \cos\gamma'\cot\psi)(\cos\tau''\cot\varphi + \cos\gamma''\cot\psi)}.$$

Pour la base et la surface latérale de la pyramide, on est immédiatement conduit aux formules suivantes :

$$\Delta ABC = \frac{3V'}{c\sin\psi},\quad \Delta AOB + \Delta BOC + \Delta COA = \frac{3V'}{c\sin\varphi}.$$

Concevons maintenant que, de la pyramide O.ABC, on retranche la pyramide O.A′B′C′, et désignons par z, ω, η les valeurs que prennent c, ψ, γ pour cette pyramide. En appliquant les formules que

nous venons de trouver, le volume V″, la base et la surface latérale de la même pyramide seront donnés par les formules

$$(4)\qquad V'' = \frac{z^3 \cot\varphi \sin\tau \sin\tau' \sin\tau''}{3(\cos\tau\cot\varphi + \cos\eta\cot\omega)(\cos\tau'\cot\varphi + \cos\eta'\cot\omega)(\cos\tau''\cot\varphi + \cos\eta''\cot\omega)}.$$

$$\Delta A'B'C' = \frac{3V''}{z\sin\omega},\quad \Delta A'OB' + \Delta B'OC' + \Delta C'OA' = \frac{3V''}{z\sin\varphi},$$

où il faut supposer

$$(5)\qquad \eta' = 180^\circ - \tau'' + \eta,\quad \eta'' = 180^\circ + \tau' + \eta.$$

Les calculs étant ainsi préparés, nous allons nous occuper du tronc ABC A′B′C′. Si nous appelons V son volume et S sa surface, nous aurons

$$(6)\qquad V = V' - V'',$$

$$(7)\qquad S = 3\left[\frac{V'}{c}\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin\psi}\right) - \frac{V''}{z}\left(\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{1}{\sin\omega}\right)\right].$$

Ces formules s'appliquent à tous les cas, excepté à celui où l'on a $\varphi = 0$, c'est-à-dire où le tronc est prismatique. Alors les expressions de V′ et V″ deviennent infinies, et les expressions de V et S se présentent sous une forme indéterminée. Pour éviter cet inconvénient, nous considérerons en particulier le cas des troncs prismatiques, et d'abord nous formerons des expressions convenables pour le volume et la surface d'une figure de cette espèce.

Les expressions de V′ et V″ étant substituées dans les formules (6) et (7), on peut y introduire, au lieu de c, z et φ, la partie $MM' = h$ de l'axe du cône dont nous avons parlé, et les rayons r, r' des cercles d'intersection du même cône avec les plans qu'on mène par les points M, M′, perpendiculairement à OM; car on a

$$h = c - z,\quad c = r\cot\varphi,\quad z = r'\cot\varphi$$

Le changement accompli, si ensuite, après une réduction convenable, on fait $r' = r$, on trouve pour le volume et la surface cherchés que, pour éviter toute confusion, nous désignerons respectivement par v

et s :

$$(8)\quad v = \frac{r^3 \operatorname{tang}\tau \operatorname{tang}\tau' \operatorname{tang}\tau''}{3}\left[\begin{array}{l}\dfrac{3h}{r} - \cot\psi\left(\dfrac{\cos\gamma}{\cos\tau} + \dfrac{\cos\gamma'}{\cos\tau'} + \dfrac{\cos\gamma''}{\cos\tau''}\right)\\ \qquad + \cot\omega\left(\dfrac{\cos\eta}{\cos\tau} + \dfrac{\cos\eta'}{\cos\tau'} + \dfrac{\cos\eta''}{\cos\tau''}\right)\end{array}\right],$$

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} s = r^2 \operatorname{tang}\tau \operatorname{tang}\tau' \operatorname{tang}\tau'' \\ \times\left[\begin{array}{l}\dfrac{2h}{r} + \dfrac{1}{\sin\psi} + \dfrac{1}{\sin\omega} - \cot\psi\left(\dfrac{\cos\gamma}{\cos\tau} + \dfrac{\cos\gamma'}{\cos\tau'} + \dfrac{\cos\gamma''}{\cos\tau''}\right)\\ \qquad + \cot\omega\left(\dfrac{\cos\eta}{\cos\tau} + \dfrac{\cos\eta'}{\cos\tau'} + \dfrac{\cos\eta''}{\cos\tau''}\right)\end{array}\right]\end{array}\right.,$$

où il n'y a plus d'ambiguïté.

Remarquons ici que si un tronc quelconque de pyramide triangulaire offre une surface moindre que tous les autres, les valeurs correspondantes des éléments qui le déterminent doivent rendre l'expression de S et celle de s, dans le cas d'un tronc prismatique, un véritable minimum. Donc, si l'on connaît tous les minima de S correspondant aux troncs des pyramides ordinaires et ceux de s correspondant aux troncs prismatiques, on aura le tronc cherché.

Proposons-nous de les trouver, et admettons d'abord que φ ne soit pas zéro; alors, en opérant suivant le principe du calcul différentiel, il faut différentier les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6) et (7). La différentiation faite dans la supposition de V = constant, si ensuite on pose

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} m = \dfrac{1}{\cos\tau\cot\varphi + \cos\gamma\cot\psi}, & m' = \dfrac{1}{\cos\tau'\cot\varphi + \cos\gamma'\cot\psi},\\ m'' = \dfrac{1}{\cos\tau''\cot\varphi + \cos\gamma''\cot\psi}, & p = \dfrac{\sin\psi + \sin\varphi}{\sin\varphi\sin\psi},\end{array}\right.$$

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{ll} n = \dfrac{1}{\cos\tau\cot\varphi + \cos\eta\cot\omega}, & n' = \dfrac{1}{\cos\tau'\cot\varphi + \cos\eta'\cot\omega},\\ n'' = \dfrac{1}{\cos\tau''\cot\varphi + \cos\eta''\cot\omega}, & q = \dfrac{\sin\omega - \sin\varphi}{\sin\varphi\sin\omega},\end{array}\right.$$

et qu'entre les équations obtenues, on élimine $d\tau$, $d\gamma'$, $d\gamma''$, $d\eta'$, $d\eta''$

et dV'', on trouve

$$dS = 3\left[\begin{array}{l}\left(\frac{p}{c} - \frac{q}{z}\right) dV' - \frac{pV'}{c^2}\, dc + \frac{qV''}{z^2}\, dz \\ - \frac{V'\cos\psi}{c\sin^2\psi}\, d\psi - \frac{V''\cos\omega}{z\sin^2\omega}\, d\omega - \left(\frac{V'}{c} - \frac{V''}{z}\right)\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\, d\varphi\end{array}\right],$$

$$dV' = V'\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{c}\, dc + \cot\psi\,(m\sin\gamma + m'\sin\gamma' + m''\sin\gamma'')\, d\gamma \\ \qquad + (m\cos\gamma + m'\cos\gamma' + m''\cos\gamma'')\,\frac{d\psi}{\sin^2\psi} \\ \qquad + (m\cos\tau + m'\cos\tau' + m''\cos\tau'' - \operatorname{tang}\varphi)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \\ + \left[\begin{array}{c}\frac{m'(\cot\varphi + \cos\gamma'\cos\tau'\cot\psi)}{\sin\tau'} - \frac{m(\cot\varphi + \cos\gamma\cos\tau\cot\psi)}{\sin\tau} \\ + m''\sin\gamma''\cot\psi\end{array}\right] d\tau' \\ + \left[\begin{array}{c}\frac{m''(\cot\varphi + \cos\gamma''\cos\tau''\cot\psi)}{\sin\tau''} - \frac{m(\cot\varphi + \cos\gamma\cos\tau\cot\psi)}{\sin\tau} \\ - m'\sin\gamma'\cot\psi\end{array}\right] d\tau''\end{array}\right\},$$

$$dV'' = V''\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{z}\, dz + \cot\omega\,(n\sin\eta + n'\sin\eta' + n''\sin\eta'')\, d\eta \\ \qquad + (n\cos\eta + n'\cos\eta' + n''\cos\eta'')\,\frac{d\omega}{\sin^2\omega} \\ \qquad + (n\cos\tau + n'\cos\tau' + n''\cos\tau'' - \operatorname{tang}\varphi)\,\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \\ + \left[\begin{array}{c}\frac{n'(\cot\varphi + \cos\eta'\cos\tau'\cot\omega)}{\sin\tau'} - \frac{n(\cot\varphi + \cos\eta\cos\tau\cot\omega)}{\sin\tau} \\ + n''\sin\eta''\cot\omega\end{array}\right] d\tau' \\ + \left[\begin{array}{c}\frac{n''(\cot\varphi + \cos\eta''\cos\tau''\cot\omega)}{\sin\tau''} - \frac{n(\cot\varphi + \cos\eta\cos\tau\cot\omega)}{\sin\tau} \\ - n'\sin\eta'\cot\omega\end{array}\right] d\tau''.\end{array}\right\}.$$

Pour chacun des minima cherchés, on aura $dS = 0$, comme il est facile de s'en assurer. Si donc, au moyen des deux dernières équations, on a éliminé dc et dz de l'expression de dS, les coefficients des différentielles restantes s'évanouiront séparément. Voici les équations

que l'on trouve :

$$(12)\qquad pz = qc,$$

$$(13)\qquad \cot\psi\,(m\sin\gamma + m'\sin\gamma' + m''\sin\gamma'') = 0,$$

$$(14)\qquad \cot\omega\,(n\sin\eta + n'\sin\eta' + n''\sin\eta'') = 0,$$

$$(15)\qquad m\cos\gamma + m'\cos\gamma' + m''\cos\gamma'' = \frac{3\cos\psi}{p},$$

$$(16)\qquad n\cos\eta + n'\cos\eta' + n''\cos\eta'' = -\frac{3\cos\omega}{q},$$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &pz\,\mathrm{V}'\left[m\cos\tau + m'\cos\tau' + m''\cos\tau'' - \operatorname{tang}\varphi - \frac{3\cos\varphi}{p}\right] \\ &= qc\,\mathrm{V}''\left[n\cos\tau + n'\cos\tau' + n''\cos\tau'' - \operatorname{tang}\varphi - \frac{3\cos\varphi}{q}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &pz\,\mathrm{V}'\left[\frac{m'(\cot\varphi + \cos\gamma'\cos\tau'\cot\psi)}{\sin\tau'} - \frac{m(\cot\varphi + \cos\gamma\cos\tau\cot\psi)}{\sin\tau} + m''\sin\gamma''\cot\psi\right], \\ &= qc\,\mathrm{V}''\left[\frac{n'(\cot\varphi + \cos\eta'\cos\tau'\cot\omega)}{\sin\tau'} - \frac{n(\cot\varphi + \cos\eta\cos\tau\cot\omega)}{\sin\tau} + n''\sin\eta''\cot\omega\right], \end{aligned}\right.$$

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &pz\,\mathrm{V}'\left[\frac{m''(\cot\varphi + \cos\gamma''\cos\tau''\cot\psi)}{\sin\tau''} - \frac{m(\cot\varphi + \cos\gamma\cos\tau\cot\psi)}{\sin\tau} - m'\sin\gamma'\cot\psi\right] \\ &= qc\,\mathrm{V}''\left[\frac{n''(\cot\varphi + \cos\eta''\cos\tau''\cot\omega)}{\sin\tau''} - \frac{n(\cot\varphi + \cos\eta\cos\tau\cot\omega)}{\sin\tau} - n'\sin\eta'\cot\omega\right], \end{aligned}\right.$$

Avant de commencer l'élimination, nous remarquons qu'il faut, dans les équations (13) et (14), supposer égaux à zéro les facteurs composés. On s'en assure en examinant $d^2\mathrm{S}$. Les équations de condition étant satisfaites, le coefficient de $d\gamma^2$ s'y réduit à zéro sans que cela ait lieu pour le coefficient de $d\gamma\,d\psi$, si le facteur composé, dans l'équation (13), n'est pas zéro. Il ne peut donc y avoir de minimum sans que cette condition soit remplie. Par rapport au facteur composé, dans l'é-

quation (14), ce sera la même chose; en sorte que nous aurons

$$(20)\qquad m \sin\gamma + m' \sin\gamma' + m'' \sin\gamma'' = 0,$$

$$(21)\qquad n \sin\eta + n' \sin\eta' + n'' \sin\eta'' = 0.$$

De plus, il est nécessaire que chaque relation déduite des équations (1), (2), (3), (10), (15), (20), subsiste encore après que l'on y a changé c, V', m, m', m'', p, ψ, γ, γ', γ'' en z, V'', n, n', n'', q, $-\omega$, $\eta + 180^\circ$, $\eta' + 180^\circ$, $\eta'' + 180^\circ$ respectivement; car, en faisant le même changement dans les équations mêmes, on retombe sur les équations (1), (5), (4), (11), (16) et (21).

Maintenant, pour effectuer l'élimination, nous multiplions l'équation (20) par $\frac{1}{m\,m'\,m''}$, nous multiplions la même équation par $\frac{\cos\gamma'\cos\gamma''\tang\varphi}{m}$, et l'équation (15) par $\tang\varphi \cot\psi$. Remettant ensuite pour un moment, au lieu de m, m', m'' et p, leurs valeurs, et appliquant les équations (1) et (2), d'où nous tirons

$$\cos\gamma' \cos\tau - \cos\gamma \cos\tau' = -\sin\tau'' \sin(\gamma + \tau),$$
$$\cos\gamma'' \cos\tau - \cos\gamma \cos\tau'' = \sin\tau' \sin(\gamma - \tau);$$

nous trouvons par un procédé bien simple les équations suivantes :

$$(22)\qquad M \cot^2\varphi + 2\,N \cot\varphi \cot\psi + P \cot^2\psi = 0,$$

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &m' \sin\gamma' \cos\gamma'' \sin\tau'' \sin(\gamma + \tau) - m'' \sin\gamma'' \cos\gamma' \sin\tau' \sin(\gamma - \tau) \\ &\qquad\qquad = P \tang\varphi, \end{aligned}\right.$$

$$(24)\qquad m \cos\tau + m' \cos\tau' + m'' \cos\tau'' = \frac{3(1 + \sin\varphi \sin\psi)}{p \cos\varphi},$$

où nous avons introduit les dénominations :

$$P = \sin\gamma \cos\gamma' \cos\gamma'' + \sin\gamma' \cos\gamma \cos\gamma'' + \sin\gamma'' \cos\gamma \cos\gamma',$$
$$2N = \cos\tau \sin(\gamma' + \gamma'') + \cos\tau' \sin(\gamma + \gamma'') + \cos\tau'' \sin(\gamma + \gamma'),$$
$$M = \sin\gamma \cos\tau' \cos\tau'' + \sin\gamma' \cos\tau \cos\tau'' + \sin\gamma'' \cos\tau \cos\tau'.$$

Au moyen de l'équation (24) et de celle qu'on en tire par le changement de m.... en n...., on peut déterminer les valeurs de m, m',

m'', n' et n'' qui vérifient l'équation (17). Si ensuite on ôte les produits égaux pz et qc, et qu'on restitue les valeurs de p et q, on aura, en réduisant,

$$(25)\qquad V'(1 - 3\sin\varphi\sin\psi) = V''(1 + 3\sin\varphi\sin\omega).$$

Ajoutant à l'équation (24) les équations (20) et (15) multipliées respectivement par $-\sin(\gamma' + \tau')$ et $-\cos(\gamma' + \tau')$, et ayant égard aux équations (1) et (2), on trouve, après une réduction bien simple,

$$(26)\quad 2mp\sin\tau'\sin\tau''\cos\varphi = 3[1 + \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos(\gamma' + \tau')],$$

où m' et m'' n'entrent plus. On aura de même,

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &2m'p\sin\tau\sin\tau''\cos\varphi \\ &= 3[1 + \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos(\gamma'' + \tau'')], \\ &2m''p\sin\tau\sin\tau'\cos\varphi \\ &= 3[1 + \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos(\gamma + \tau)]. \end{aligned}\right.$$

Ayant éliminé m'', n'' entre les équations (18), (20), (21), et m', n' entre les équations (19), (20), (21), si ensuite on substitue les valeurs de m, m', m'' que donnent les équations (26) et (27), et les valeurs correspondantes de n, n', n'', on trouve facilement, en observant les relations

$$\cos(\gamma + \tau) = \cos(\gamma' - \tau'),\ \cos(\gamma' + \tau') = \cos(\gamma'' - \tau''),$$
$$\cos(\gamma'' + \tau'') = \cos(\gamma - \tau),$$

auxquelles donnent lieu les équations (1) et (2), celles qui en résultent par le changement de γ... en $\eta + 180°$..., et les valeurs de p et q :

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} V'\sin\gamma''\cos\psi &= -V''\sin\eta''\cos\omega, \\ V'\sin\gamma'\cos\psi &= -V''\sin\eta'\cos\omega. \end{aligned}\right.$$

Pour que ces équations subsistent conformément aux conditions du problème, il faut qu'on ait $\cos\psi = 0$, et en même temps $\cos\omega = 0$, ou bien $\sin\gamma'' : \sin\gamma' = \sin\eta'' : \sin\eta'$.

En examinant l'équation (25) dans la supposition de $\psi = \omega = 90°$, on sera bientôt conduit à l'absurde, quand on y aura substitué les valeurs de V' et V'' données par les équations (3) et (4), celle de c

tirée de l'équation (12), et enfin les expressions de p et q. Il faut donc supposer

$$\sin\gamma'' : \sin\gamma' = \sin\eta'' : \sin\eta'.$$

Cette analogie, combinée avec les équations (1), (2), (5) et (28), nous donne

$$\eta = \gamma \pm 180^\circ, \qquad \eta' = \gamma' \pm 180^\circ, \qquad \eta'' = \gamma'' \pm 180^\circ,$$

où il faut prendre les signes supérieurs ensemble et les signes inférieurs ensemble; et

$$(29) \qquad V' \cos\psi = V'' \cos\omega.$$

Si, dans l'équation (23), on substitue les valeurs de m' et m'' tirées des équations (27), et qu'ensuite on rétablisse la valeur de p, on trouve en réduisant et en ayant égard aux relations

$$\sin(\gamma'' - \gamma') = \sin\tau, \qquad \cos(\gamma'' + \tau'') = \cos(\gamma - \tau),$$
$$2[\cos\tau \sin(\gamma' + \gamma'') - \sin\gamma \cos\gamma] = \cos\tau \sin(\gamma' + \gamma'')$$
$$+ \cos\tau' \sin(\gamma + \gamma'') + \cos\tau'' \sin(\gamma + \gamma') = 2N,$$

amenées par les équations (1) et (2) :

$$2P + \frac{2P\sin\varphi}{\sin\psi} = 3\left[\begin{array}{c}[\cos\gamma \sin(\gamma' + \gamma'') - \sin\gamma \cos\tau] \\ \times (1 + \sin\varphi \sin\psi) - N\cos\varphi \cos\psi\end{array}\right].$$

Divisant par $\sin\varphi \sin\psi$, puis remplaçant $\frac{1}{\sin^2\psi}$ par $1 + \cot^2\psi$, on aura, en posant

$$2P - 3[\cos\gamma \sin(\gamma' + \gamma'') - \sin\gamma \cos\tau] = \cos\gamma' \sin(\gamma - \gamma'')$$
$$+ \cos\gamma'' \sin(\gamma - \gamma') + 3\sin\gamma \cos\tau = Q,$$

et réduisant,

$$-Q - 3N\cot\varphi \cot\psi - 2P\cot^2\psi = \frac{Q}{\sin\varphi \sin\psi}.$$

Si à cette équation on ajoute l'équation (22) multipliée par 2, on

trouve

$$(30)\qquad 2M\cot^2\varphi - Q + N\cot\varphi\cot\psi = \frac{Q}{\sin\varphi\sin\psi};$$

d'où résulte, en élevant les deux membres au carré, puis exprimant les sinus par les cotangentes, et réduisant,

$$(4M^2\cot^2\varphi - 4MQ - Q^2)\cot^2\varphi + 2N(2M\cot^2\varphi - Q)\cot\varphi\cot\psi$$
$$+ [(N^2 - Q^2)\cot^2\varphi - Q^2]\cot^2\psi = 0.$$

Enfin, si l'on ajoute cette équation et l'équation (22) multipliée par $Q - 2M\cot^2\varphi$, on aura

$$[2M^2\cot^2\varphi - 3MQ - Q^2]\cot^2\varphi$$
$$+ [N^2 - Q^2 - 2MP)\cot^2\varphi + PQ - Q^2]\cot^2\psi = 0.$$

Pour passer à l'équation correspondante par le changement de $\gamma\ldots$ en $\eta + 180^\circ\ldots$, il n'y a qu'à changer ψ en $-\omega$; car, suivant les relations établies entre $\gamma, \gamma', \gamma''$ et η, η', η'', les expressions de M, N, P, Q ne changeront pas.

Il est donc nécessaire que l'équation que nous venons de former, résolue par rapport à $\cot\psi$, nous donne la valeur de cette quantité, de même que celle de $-\cot\omega$, si elle n'est pas vérifiée indépendamment de ψ. Mais c'est bien cela qu'il faut supposer, car l'équation (29), d'où résulte $\psi > \omega$, nous empêche d'employer les valeurs égales qu'on trouve pour les mêmes quantités. Nous aurons donc

$$(31)\qquad 2M^2\cot^2\varphi - 3MQ - Q^2 = 0.$$

Soustrayant de l'équation (30) multipliée par $\operatorname{tang}\psi$, celle qui en résulte par le changement de ψ en $-\omega$, on aura

$$\sin\varphi(2M\cot^2\varphi - Q)(\operatorname{tang}\psi + \operatorname{tang}\omega) = \left(\frac{1}{\cos\psi} - \frac{1}{\cos\omega}\right)Q.$$

Divisant membre à membre l'équation (25) par l'équation (29), on

trouve

$$(32)\qquad \frac{1}{\cos\psi} - \frac{1}{\cos\omega} = 3\sin\varphi(\operatorname{tang}\psi + \operatorname{tang}\omega);$$

d'où, à cause de l'équation précédente,

$$M\cot^2\varphi - 2Q = 0.$$

Éliminant Q entre cette équation et l'équation (31), on est conduit à

$$M^2(\cot^2\varphi - 2) = 0,$$

d'où résulte $M = 0$; car, en examinant l'équation (32), on voit qu'il faut supposer $\sin\varphi < \frac{1}{3}$, ce qui donne $\cot^2\varphi > 8$. La valeur de M étant substituée dans l'équation (31), nous en tirons $Q = 0$. On aura donc, en reprenant les expressions de M et de Q, et en les transformant par rapport à l'équation (1), après avoir introduit les valeurs de γ' et γ'',

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sin\gamma[\cos\tau'\cos\tau'' - \cos\tau(\cos^2\tau' + \cos^2\tau'')] \\ &\qquad\qquad + \cos\gamma\cos^2\tau\sin(\tau' - \tau'') = 0, \\ &\sin\gamma(\cos\tau - 2\cos\tau'\cos\tau'') - \cos\gamma\sin(\tau' - \tau'') = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminant γ entre ces équations, on trouve

$$\sin(\tau' - \tau'')\left\{\begin{aligned} &\cos\tau(\cos^2\tau - \cos^2\tau') \\ &+ \cos\tau''[\sin^2\tau\cos\tau' - \cos\tau(\cos\tau'' + \cos\tau\cos\tau')] \end{aligned}\right\} = 0.$$

Mais, en vertu de l'équation (1), le facteur composé contenu dans le premier membre de cette équation peut être remplacé par le produit $\sin(\tau - \tau')\sin(\tau - \tau'')$. Nous aurons donc

$$\sin(\tau - \tau')\sin(\tau - \tau'')\sin(\tau' - \tau'') = 0,$$

d'où nous concluons que deux des angles τ, τ', τ'' sont égaux.

Supposons $\tau'' = \tau'$, et substituons cette valeur de τ'' dans les équations (33); elles nous donnent

$$\tau = \tau' = \tau'', \qquad \text{ou bien} \qquad \sin\gamma = 0.$$

Si, dans la supposition de $\tau = \tau' = \tau''$, d'où résulte

$$-\cos(\gamma' + \tau') = \cos\gamma, \qquad -\cos(\gamma'' + \tau'') = \cos\gamma',$$
$$-\cos(\gamma + \tau) = \cos\gamma'',$$

on soustrait les équations (26) et (27) deux à deux l'une de l'autre, et qu'ensuite on remplace m, m' et m'' par leurs valeurs, qui sont toutes positives, de même que celle de p; on est conduit à la relation $\cos\gamma = \cos\gamma' = \cos\gamma''$, qu'on ne peut pas admettre. Il faut donc passer le cas de $\tau = \tau' = \tau''$.

Supposons maintenant, outre $\tau'' = \tau'$, $\sin\gamma = 0$, d'où nous tirons $\gamma = 0$, ou bien $\gamma = 180^\circ$, et soit d'abord $\gamma = 0$. Si, dans ce cas, on rétablit les valeurs de m et γ', et si l'on élimine $\tau'' = \tau'$ au moyen de l'équation (1), l'équation (26) prendra facilement la forme

$$(34) \qquad \frac{1 + \cos\tau}{\cos\tau \cot\varphi + \cot\psi} = \frac{6\cos^2\frac{1}{2}(\psi - \varphi)}{p\cos\varphi}.$$

En transformant l'expression de V′, donnée par l'équation (3) dans la même supposition, les valeurs de γ' et γ'' étant rétablies, on trouve, en appliquant l'équation (34),

$$V' = \frac{2c^3 \sin\tau \operatorname{tang}^2\tau' \cos^2\frac{1}{2}(\psi - \varphi)}{p(1 + \cos\tau)\sin\varphi(\cot\varphi - \cot\psi)^2} = \frac{c^3 \sin\tau \operatorname{tang}^2\tau' \sin\varphi \sin^2\psi}{2p(1 + \cos\tau)\sin^2\frac{1}{2}(\psi - \varphi)}.$$

Substituant cette valeur de V′ et la valeur correspondante de V″ dans l'équation qui résulte lorsque à l'équation (25) on ajoute l'équation (29) multipliée par $3\cos\varphi$; puis éliminant c au moyen de l'équation (12), et restituant les valeurs de p et q, on aura, en réduisant,

$$(35) \quad \begin{cases} [1 + 3\cos(\psi + \varphi)][1 - \cos(\psi + \varphi)]\cot^2\frac{1}{2}(\psi - \varphi) \\ = [1 + 3\cos(\omega - \varphi)][1 - \cos(\omega - \varphi)]\cot^2\frac{1}{2}(\omega + \varphi). \end{cases}$$

De plus, on tire de l'équation (32)

$$3\sin\varphi\sin(\psi + \omega) = \cos\varphi - \cos\psi - (\cos\varphi - \cos\omega)$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\psi + \varphi)\sin(\psi - \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\psi - \varphi)} - \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega - \varphi)\sin(\omega + \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\omega + \varphi)};$$

et l'on trouve sans difficulté, en éliminant τ entre l'équation (34) et celle qui en résulte par le changement de p et ψ en q et $-\omega$, les valeurs de p et q étant ensuite rétablies,

$$3 \sin\varphi \sin(\psi + \omega) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\psi + \varphi)\sin(\omega + \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\psi - \varphi)} - \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega - \varphi)\sin(\psi - \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\omega + \varphi)}.$$

Combinant cette équation avec la précédente, on aura

$$[\sin(\psi - \varphi) - \sin(\omega + \varphi)]\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\psi + \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\psi - \varphi)} + \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega - \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\omega + \varphi)}\right] = 0,$$

d'où

$$(36) \qquad \psi - \varphi = \omega + \varphi.$$

φ étant éliminé au moyen de cette équation, l'équation (32) nous donne

$$(37) \qquad \cos\frac{1}{2}(\psi + \omega) = \frac{1}{3}.$$

En combinant encore l'équation (36) avec l'équation (35), on trouve

$$[\cos(\psi + \varphi) - \cos(\omega - \varphi)]$$
$$\times \{2 - 3[\cos(\psi - \varphi + 2\varphi) + \cos(\omega + \varphi - 2\varphi)]\} = 0.$$

Ici l'on ne peut pas supposer le premier facteur égal à zéro, et ce sera la même chose par rapport au second; car, en conséquence des équations (36) et (37), d'où, au reste, nous tirons

$$\cos(\psi - \varphi) = \cos(\omega + \varphi) = \frac{1}{3},$$

ce même facteur se réduit à $1 - \cos 2\varphi$, quantité qu'il ne faut pas supposer égale à zéro, vu les conditions établies.

Si, au lieu de supposer $\gamma = 0$, on suppose $\gamma = 180^\circ$, ce qui produit le même effet que si l'on avait remplacé ψ et ω par $180^\circ - \psi$ et $180^\circ - \omega$ respectivement dans la supposition de $\gamma = 0$, on est conduit au même résultat.

Il est donc démontré qu'il n'y a aucun tronc de pyramide triangulaire à volume donné dont la surface remplisse les conditions de minimum, si ce n'est un tronc prismatique.

Si, après avoir différentié les équations (1), (2), (5), (8) et (9), v étant constant, on élimine dh, $d\gamma'$, $d\gamma''$, $d\eta'$, $d\eta''$ et $d\tau$ entre les équations obtenues, et qu'ensuite on égale à zéro les coefficients de dr, $d\gamma$, $d\eta$, $d\psi$, $d\omega$, $d\tau'$, $d\tau''$ dans l'équation qui résulte, on est conduit aux équations suivantes :

$$\frac{1}{\sin\psi} + \frac{1}{\sin\omega} - \frac{h}{r} = 0, \tag{38}$$

$$\sin\gamma\cos\tau'\cos\tau'' + \sin\gamma'\cos\tau\cos\tau'' + \sin\gamma''\cos\tau\cos\tau' = 0, \tag{39}$$

$$\sin\eta\cos\tau'\cos\tau'' + \sin\eta'\cos\tau\cos\tau'' + \sin\eta''\cos\tau\cos\tau' = 0, \tag{40}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\gamma\cos\tau'\cos\tau'' + \cos\gamma'\cos\tau\cos\tau'' + \cos\gamma''\cos\tau\cos\tau' \\ &\qquad - 3\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''\cos\psi = 0, \end{aligned}\right. \tag{41}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\eta\cos\tau'\cos\tau'' + \cos\eta'\cos\tau\cos\tau'' + \cos\eta''\cos\tau\cos\tau' \\ &\qquad + 3\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''\cos\omega = 0, \end{aligned}\right. \tag{42}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{3\cos\tau''\sin(\tau'-\tau)}{\sin\tau\sin\tau'\cos\tau\cos\tau'}\left[\frac{1}{\sin\psi} + \frac{1}{\sin\omega} - \frac{h}{r} + \frac{v}{r^3\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\tau'\operatorname{tang}\tau''}\right] \\ &\qquad + \cot\psi\left[\frac{\sin\gamma''}{\cos\tau''} - \frac{\cos\gamma'\sin\tau'}{\cos^2\tau'} + \frac{\cos\gamma\sin\tau}{\cos^2\tau}\right] \\ &\qquad - \cot\omega\left[\frac{\sin\eta''}{\cos\tau''} - \frac{\cos\eta'\sin\tau'}{\cos^2\tau'} + \frac{\cos\eta\sin\tau}{\cos^2\tau}\right] = 0, \end{aligned}\right. \tag{43}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{3\cos\tau'\sin(\tau-\tau'')}{\sin\tau\sin\tau''\cos\tau\cos\tau''}\left[\frac{1}{\sin\psi} + \frac{1}{\sin\omega} - \frac{h}{r} + \frac{v}{r^3\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\tau'\operatorname{tang}\tau''}\right] \\ &\qquad + \cot\psi\left[\frac{\sin\gamma'}{\cos\tau'} + \frac{\cos\gamma\sin\tau}{\cos^2\tau} + \frac{\cos\gamma''\sin\tau''}{\cos^2\tau''}\right] \\ &\qquad - \cot\omega\left[\frac{\sin\eta'}{\cos\tau'} - \frac{\cos\eta\sin\tau}{\cos^2\tau} + \frac{\cos\eta''\sin\tau''}{\cos^2\tau''}\right] = 0, \end{aligned}\right. \tag{44}$$

auxquelles doivent satisfaire les valeurs des éléments qui déterminent le tronc prismatique triangulaire de volume donné, dont la surface est un minimum. Au reste, il faut remarquer que, des équations (39)

et (40), nous avons ôté les facteurs cot ψ et cot ω par la même raison pour laquelle ces facteurs ont été introduits dans les équations (13) et (14).

Ajoutant les équations (39) et (41), multipliées respectivement par $-\cos\gamma$ et $\sin\gamma$, ajoutant les mêmes équations multipliées respectivement par $-\cos\gamma'$ et $\sin\gamma'$, par $-\cos\gamma''$ et $\sin\gamma''$, par $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$, par $\sin\gamma'$ et $\cos\gamma'$, et enfin par $\sin\gamma''$ et $\cos\gamma''$, on trouve, en ayant égard aux équations (1) et (2),

$$\cos\tau\sin(\tau''-\tau') = 3\sin\gamma\cos\tau'\cos\tau''\cos\psi, \tag{45}$$

$$\left\{\begin{aligned} \cos\tau'\sin(\tau-\tau'') &= 3\sin\gamma'\cos\tau\cos\tau''\cos\psi, \\ \cos\tau''\sin(\tau'-\tau) &= 3\sin\gamma''\cos\tau\cos\tau'\cos\psi, \end{aligned}\right. \tag{46}$$

$$\cos\tau'\cos\tau''-\cos\tau(\cos^2\tau'+\cos^2\tau'') = 3\cos\gamma\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''\cos\psi, \tag{47}$$

$$\left\{\begin{aligned} \cos\tau\cos\tau''-\cos\tau'(\cos^2\tau+\cos^2\tau'') &= 3\cos\gamma'\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''\cos\psi, \\ \cos\tau\cos\tau'-\cos\tau''(\cos^2\tau+\cos^2\tau'') &= 3\cos\gamma''\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''\cos\psi, \end{aligned}\right. \tag{48}$$

équations qui doivent encore subsister quand on y a changé γ, γ', γ'', ψ en $\eta+180^\circ$, $\eta'+180^\circ$, $\eta''+180^\circ$, ω, ce qui résulte des équations (1), (5), (40), (42). Mais, pour cela, il faut qu'on ait

$$\cos\psi = \cos\omega = 0 \quad \text{et} \quad \tau = \tau' = \tau'' = 60^\circ,$$

ou bien

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\eta} = \frac{\sin\gamma'}{\sin\eta'} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\eta''}.$$

En supposant d'abord $\psi = \omega = 90^\circ$, $\tau = \tau' = \tau'' = 60^\circ$, les équations (8) et (38) nous donnent

$$h = 2r = \sqrt[6]{\frac{16\nu^2}{27}},$$

et l'on voit facilement que toutes les équations de condition sont vérifiées par ces valeurs, indépendamment de γ et η. L'examen de d^2S nous montrerait que la surface de la figure correspondante est un véritable minimum; mais, comme cette vérification n'est pas nécessaire,

nous nous en dispensons. La même figure est, au reste, un prisme régulier dont la hauteur est égale au diamètre du cylindre inscrit, et l'on trouve, en exprimant sa surface S′ par son volume,

$$S' = 3\sqrt[6]{108}\,V^4.$$

Supposons maintenant

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\eta} = \frac{\sin\gamma'}{\sin\eta'} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\eta''}.$$

En combinant cette analogie avec les équations (1), (2), (5), (38), (41) et (42), nous serons conduit aux relations suivantes :

$$\eta = \gamma \pm 180^\circ, \quad \eta' = \gamma' \pm 180^\circ, \quad \eta'' = \gamma'' \pm 180^\circ, \quad \omega = \psi, \quad h = \frac{2r}{\sin\psi},$$

où il faut encore prendre en même temps les signes supérieurs ou les signes inférieurs.

Substituant ces valeurs dans les équations (8), (43) et (44), nous trouvons, en réduisant et observant l'équation (41),

$$(49) \qquad v = 2r^3 \operatorname{tang}\tau \operatorname{tang}\tau' \operatorname{tang}\tau'' \sin\psi,$$

$$\frac{3\cos\tau''\sin(\tau'-\tau)\sin\psi}{\sin\tau\sin\tau'\cos\tau\cos\tau'} + \cot\psi\left[\frac{\sin\gamma''}{\cos\tau''} - \frac{\cos\gamma'\sin\tau'}{\cos^2\tau'} + \frac{\cos\gamma\sin\tau}{\cos^2\tau}\right] = 0,$$

$$\frac{3\cos\tau'\sin(\tau-\tau'')\sin\psi}{\sin\tau\sin\tau''\cos\tau\cos\tau''} + \cot\psi\left[\frac{\sin\gamma'}{\cos\tau'} - \frac{\cos\gamma\sin\tau}{\cos^2\tau} + \frac{\cos\gamma''\sin\tau''}{\cos^2\tau''}\right] = 0.$$

Si, à la seconde de ces équations, on ajoute l'équation (39) multipliée par $-\frac{\cot\psi\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\tau'}{\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''}$, et qu'on ajoute la même équation multipliée par $-\frac{\cot\psi\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\tau''}{\cos\tau\cos\tau'\cos\tau''}$ à la troisième, on trouve, après une transformation bien simple,

$$(50) \quad \begin{cases} \dfrac{3\cos\tau''\sin(\tau'-\tau)\sin\psi}{\sin\tau\sin\tau'} = \cot\psi\left[\sin\gamma'' - \dfrac{\cos\gamma''\sin(\tau'-\tau)}{\cos\tau\cos\tau'}\right], \\[2ex] \dfrac{3\cos\tau'\sin(\tau-\tau'')\sin\psi}{\sin\tau\sin\tau''} = \cot\psi\left[\sin\gamma' - \dfrac{\cos\gamma'\sin(\tau-\tau'')}{\cos\tau\cos\tau''}\right]. \end{cases}$$

Maintenant si l'on élimine ψ entre ces équations, après y avoir substitué les valeurs de $\sin\gamma'$, $\sin\gamma''$, $\cos\gamma'$ et $\cos\gamma''$, qu'on tire des équations (46) et (48), on aura, en réduisant,

$$\sin(\tau - \tau')\sin(\tau - \tau'')\sin(\tau' - \tau'') = 0.$$

Il est donc nécessaire que deux des angles τ, τ', τ'' soient égaux. En supposant que ce soient τ' et τ'', l'équation (45) nous donne

$$\sin\gamma = 0; \tag{51}$$

car nous ne pouvons pas avoir $\cos\psi = 0$ sans retomber sur la solution déjà trouvée.

De plus, si dans l'équation (50) nous remplaçons $\cos\tau''\sin(\tau' - \tau)$ par la valeur que donne la seconde des équations (46), et si ensuite nous restituons la valeur de γ'', nous trouvons, au lieu des équations (47) et (50),

$$1 - 2\cos\tau = 3\cos\gamma\cos\tau\cos\psi, \qquad 9\sin^2\psi = \operatorname{tang}^2\tau.$$

Combinant ces équations avec l'équation (51), nous trouvons

$$\gamma = 0, \qquad \cos\psi = \cos\tau = \frac{1}{3},$$

et enfin les équations (1) et (49) nous donnent

$$\cos^2\tau' = \frac{1}{3}, \qquad r = \frac{\sqrt[3]{6V}}{4}.$$

Il y aura donc encore un système de valeurs pour lequel toutes les équations de condition seront satisfaites; mais, en examinant la figure correspondante, nous trouvons que c'est une pyramide; et, puisqu'il en est ainsi, nous n'avons pas à nous en occuper davantage.

Le prisme nouvellement déterminé est donc, entre tous les troncs de pyramides triangulaires, à volume égal, le seul qui puisse avoir une surface minimum. Comparant la surface s' du même prisme avec celle S' de la pyramide dont nous avons parlé au commencement, nous trouvons, en supposant les volumes égaux,

$$s' < S'.$$

Le prisme régulier dont la hauteur équivaut au diamètre du cylindre inscrit est donc la figure que nous nous sommes proposé de trouver.

Note de M. Catalan. — Le résultat obtenu par M. Sucksdorff est d'accord avec ce théorème que j'ai entendu énoncer autrefois (par M. Steiner, ce me semble) : *Parmi tous les polyèdres de même espèce et équivalents en surface, le plus grand est celui qui est circonscriptible à une sphère, et dans lequel les points de contact des faces sont les centres de gravité de ces faces.*

SUR L'EXPRESSION $\varphi(n)$,

QUI MARQUE COMBIEN LA SUITE 1, 2, 3,..., n CONTIENT DE NOMBRES PREMIERS A n;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Euler a donné la valeur générale et simple de l'expression $\varphi(n)$, qui marque combien la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ n-1,\ n,$$

contient de nombres premiers à n. Il est clair que l'on a

$$\varphi(1) = 1,$$

et pour un entier n quelconque, décomposé en facteurs premiers, sous la forme

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots c^{\gamma},$$

Euler trouve

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{c}\right).$$

De là il est aisé de conclure, par le calcul effectué, que la somme

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \ldots + \varphi(n),$$

des expressions φ, appliquées successivement à tous les diviseurs

$$1,\ d,\ldots,\ n$$

de n, est égale au nombre n lui-même. Voyez sur ce point une Note de M. Catalan (1re série, tome IV, page 7).

Mais on peut aussi établir l'équation

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \ldots + \varphi(n) = n$$

par un raisonnement direct, indépendant de la formule qui donne $\varphi(n)$, et c'est même ainsi que Gauss, à qui cette équation est due, l'a d'abord démontrée (*voir* le n° **39** des *Disquisitiones arithmeticæ*). Cela étant, si l'on observe que l'équation dont il s'agit, en y faisant successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, etc., donne l'une après l'autre les valeurs de φ, savoir

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(4) = 2, \ldots,$$

on sera conduit à se proposer d'en tirer la valeur de $\varphi(n)$ pour un entier quelconque n.

Le problème peut d'ailleurs être ainsi généralisé. Supposant

$$f(1) + f(d) + \ldots + f(n) = \mathrm{F}(n),$$

où le signe $f(n)$, qui représente une quantité déterminée dépendante de l'entier n, est appliqué à tous les diviseurs $1, d, \ldots, n$ de n, exprimer $f(n)$ au moyen de F. La réponse est fournie par la formule suivante, que je me garde bien, du reste, de présenter comme nouvelle, car quiconque l'aura cherchée a dû la trouver :

$$f(n) = \mathrm{F}(n) - \sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right) + \sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{abc}\right) + \ldots;$$

$a, b, c, \ldots$, sont les nombres premiers distincts, facteurs de n : les signes $+$ et $-$ alternent : on pose, pour abréger,

$$\sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n}{b}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots,$$

$$\sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{ab}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{n}{ab}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n}{ac}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n}{bc}\right) + \ldots,$$

. . . . . .

Cette formule est aisée à établir, et plus aisée encore à vérifier.

Elle donne

$$f(1) = \mathrm{F}(1),$$

puis, pour une puissance de nombre premier,

$$f(a^\alpha) = \mathrm{F}(a^\alpha) - \mathrm{F}(a^{\alpha-1}),$$

puis encore

$$f(a^\alpha b^\beta) = F(a^\alpha b\ ) - F(a^{\alpha-1} b^\beta) - F(a^\alpha b^{\beta-1}) + F(a^{\alpha-1} b^{\beta-1}),$$

et ainsi de suite.

Mise en usage sur l'équation

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \ldots + \varphi(n) = n,$$

elle fournit

$$\varphi(n) = n - \sum \frac{n}{a} + \sum \frac{n}{ab} - \sum \frac{n}{abc} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{c}\right),$$

ce qu'il fallait trouver.

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES-UNES DES FORMES LES PLUS SIMPLES

QUE PUISSENT PRÉSENTER

LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL;

PAR M. JOSEPH BERTRAND.

J'ai démontré, dans un Mémoire publié dans le tome XVII de ce Journal, que, connaissant une intégrale des équations différentielles d'un problème de mécanique, et sachant seulement que les forces s'expriment en fonction des coordonnées de leurs points d'application, on peut trouver quel est le problème, et déterminer les composantes de la force qui sollicite chaque point; il est même important de remarquer que souvent la solution conduit à des résultats contradictoires, et qu'une équation écrite au hasard ne peut être, en général, l'intégrale d'aucun problème du genre que nous considérons.

Je me propose, dans ce Mémoire, de développer quelques conséquences de cette remarque, et de chercher, parmi les formes les plus simples, quelles sont celles qui peuvent se présenter comme intégrales et à quels problèmes elles répondent.

Je considère le cas d'un point matériel mobile dans un plan, et j'étudie les intégrales entières et rationnelles par rapport aux composantes de la vitesse. Les cas dans lesquels il existe de telles intégrales sont extrêmement particuliers; je fais connaître les conditions que doivent remplir les composantes de la force accélératrice pour que l'intégrale soit du premier, du second ou du troisième degré. J'étudie aussi les intégrales fractionnaires de la forme la plus simple, et je trouve tous les problèmes qui admettent une intégrale dans laquelle la con-

stante est égalée à une fraction dont les deux termes soient du premier degré par rapport aux composantes de la vitesse.

En étudiant les intégrales entières et rationnelles du second degré par rapport aux composantes de la vitesse, on est conduit à un résultat digne de remarque.

Le problème, résolu par Euler et Lagrange, du mouvement d'un point attiré vers deux centres fixes, suivant la loi de la nature, et sollicité en outre par une force proportionnelle à la distance dirigée vers un troisième centre situé au milieu de la droite qui joint les deux premiers, offre le seul cas dans lequel les équations du mouvement d'un point attiré vers des centres fixes, par des forces fonctions de la distance à ces centres, puissent avoir une intégrale entière et du second degré par rapport aux composantes de la vitesse.

Les problèmes qui sont résolus dans ce Mémoire ne forment qu'une bien minime partie des questions analogues que l'on pourrait se proposer. Quelques-unes de ces questions particulières pourront devenir fort difficiles, et la lecture de ce Mémoire prouvera, j'espère, que cette nouvelle manière d'aborder la question peut conduire à des problèmes d'analyse dignes d'intérêt.

I.

Je chercherai d'abord dans quel cas les équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

auxquelles conduit l'étude du mouvement d'un point matériel, peuvent avoir une intégrale de la forme

$$(1) \qquad \alpha = Px' + Qy' + R,$$

P, Q, R désignant, ainsi que X et Y, des fonctions quelconques des coordonnées x et y.

En différentiant l'équation (1) et en ayant égard aux équations dif-

férentielles du mouvement, on trouve

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = x'^2 \frac{dP}{dx} + y'^2 \frac{dQ}{dy} + x'y' \left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx}\right) \\ + \frac{dR}{dx} x' + \frac{dR}{dy} y' + PX + QY. \end{aligned}\right.$$

Cette équation doit avoir lieu identiquement, car on peut attribuer à x, y, x', y' des valeurs arbitraires; on en conclut

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dP}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dy} = 0, \quad \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx} = 0, \\ &\frac{dR}{dx} = 0, \quad \frac{dR}{dy} = 0, \quad PX + QY = 0, \end{aligned}\right.$$

les trois premières équations montrent immédiatement que P et Q sont respectivement de la forme

$$P = cy + c', \quad Q = -cx + c'',$$

c, c', c'' désignant des constantes.

La troisième et la quatrième équation montrent que R est une constante que l'on peut faire passer dans le premier membre et réunir à α, et enfin l'équation

$$PX + QY = 0$$

devient

$$(4)\qquad X(cy + c') + Y(-cx + c'') = 0,$$

et l'intégrale (1) est de la forme

$$(5)\qquad (cy + c')x' - (cx - c'')y' = \alpha.$$

C'est l'intégrale fournie par le principe des aires, lorsque, comme l'exprime l'équation (4), la force qui sollicite le point matériel est dirigée vers un point fixe dont les coordonnées sont

$$x_1 = \frac{c''}{c},$$

$$y_1 = -\frac{c'}{c},$$

II.

Supposons actuellement qu'une intégrale soit de la forme

$$(1)\qquad \alpha = Px'^2 + Qx'y' + Ry'^2 + Sy' + Tx' + K,$$

P, Q, R, S, T, K désignant des fonctions quelconques de x et de y. En appliquant la même méthode que dans le cas précédent, on trouvera que les forces X et Y doivent rendre identique la relation

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & x'^3\frac{dP}{dx} + y'^3\frac{dR}{dy} + x'^2y'\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx}\right) + y'^2x'\left(\frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dx}\right) \\ & + 2Px'X + Q(x'Y + y'X) + 2Ry'Y + \frac{dS}{dy}y'^2 \\ & + \frac{dT}{dx}x'^2 + x'y'\left(\frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dy}\right) + \frac{dK}{dx}x' + \frac{dK}{dy}y' \\ & + SY + TX = 0. \end{aligned}\right.$$

Égalons d'abord à zéro les termes du troisième degré par rapport à x' et à y', nous obtiendrons, entre P, Q, R, les relations suivantes :

$$\frac{dP}{dx} = 0,\qquad \frac{dR}{dy} = 0,\qquad \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx} = 0,\qquad \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dx} = 0;$$

des deux premières équations, on conclut que P est indépendant de x et Q indépendant de y. Posons donc

$$P = f(y),\qquad Q = \varphi(x),$$

et en égalant les valeurs de $\frac{d^2Q}{dx\,dy}$ déduites des deux équations suivantes, on trouve

$$\frac{d^2P}{dy^2} = \frac{d^2R}{dx^2};$$

les fonctions $f''(y)$ et $\varphi''(x)$ sont, par conséquent, deux constantes égales, et l'on a

$$P = f(y) = ay^2 + by + c,$$
$$R = \varphi(x) = ax^2 + b'x + c';$$

a, b, c désignant des constantes. Si l'on reprend alors les équations

$$\frac{dQ}{dy} = -\frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dx} = -\frac{dR}{dy},$$

on en déduit

$$Q = -2axy - b'y - bx + c_1;$$

c_1 étant une constante.

D'après ces résultats, les termes du second degré dans l'intégrale (1) doivent être de la forme

$$(ay^2 + by + c)x'^2 + (ax^2 + b'x + c')y'^2$$
$$+ (-2axy - b'y - bx + c_1)x'y',$$

et l'on peut les grouper de la manière suivante :

$$a(yx' - xy')^2 + (bx' + b'y')(yx' - xy')$$
$$+ cx'^2 + c'y'^2 + c_1x'y'.$$

Si nous égalons actuellement à zéro les termes de l'équation (2), qui sont du second degré par rapport à x' et à y', nous trouverons

$$\frac{dS}{dy} = 0, \quad \frac{dT}{dx} = 0, \quad \frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dy} = 0;$$

de ces équations on déduit, en nommant m, p, q trois constantes,

$$S = \quad mx + p,$$
$$T = -my + q.$$

Si l'on écrit enfin que les termes indépendants de x' et de y' ont une somme nulle dans l'équation (2), on obtiendra la relation

$$SY + TX = 0,$$

qui devient, en vertu des précédentes,

$$Y(mx + p) - X(my - q) = 0.$$

Ce qui prouve que la force dont les composantes sont X et Y est

dirigée vers un point fixe ayant pour coordonnées $\frac{-p}{m}$ et $\frac{q}{m}$. Et si l'on veut exclure ce cas particulier, il faut supposer

$$m = 0, \quad p = 0, \quad q = 0,$$

et par conséquent supprimer dans l'intégrale (1) les termes du premier degré en x', y'.

Si nous faisons cette hypothèse, il nous restera à écrire que dans l'équation (2) les coefficients de x' et de y' sont séparément nuls, ce qui donnera

$$(3) \qquad 2\,PX + QY + \frac{dK}{dx} = 0,$$

$$(4) \qquad 2\,RY + QX + \frac{dK}{dy} = 0.$$

On voit donc que K pourra être choisi arbitrairement, et ces deux équations du premier degré feront connaître X et Y.

Si l'on veut qu'il existe une *fonction des forces* et que, par conséquent, X et Y soient de la forme

$$X = \frac{dU}{dx},$$

$$Y = \frac{dU}{dy},$$

les équations (3) et (4) permettent de former une équation aux différentielles partielles à laquelle doit satisfaire la fonction U; il suffit, en effet, de différentier la première de ces équations par rapport à y, la seconde par rapport à x, et d'égaler les deux valeurs de $\frac{d^2K}{dx\,dy}$ qu'elles fournissent, on obtient ainsi

$$2\,P\frac{d^2U}{dx\,dy} + 2\frac{dU}{dx}\frac{dP}{dy} + Q\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{dQ}{dy}\frac{dU}{dy}$$
$$= 2\,R\frac{d^2U}{dx\,dy} + 2\frac{dR}{dx}\frac{dU}{dy} + \frac{dQ}{dx}\frac{dU}{dx} + Q\frac{d^2U}{dx^2},$$

et en remplaçant P, Q, R par leurs valeurs trouvées plus haut, on

obtient l'équation suivante :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dy^2}(-2axy - by - b'x + c_1) + \frac{d^2U}{dx^2}(2axy + by + b'x - c_1) \\ &\quad - 2\frac{d^2U}{dx\,dy}(ay^2 - ax^2 + by - b'x + c - c') + \frac{dU}{dx}(6ay + 3b) \\ &\quad + \frac{dU}{dy}(-6ax - 3b') = 0. \end{aligned}\right.$$

Je n'ai pas réussi à trouver l'intégrale de cette équation, mais on peut cependant en déduire la solution du problème suivant :

Dans quels cas la fonction U *peut-elle être de la forme*

$$\varphi[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]?$$

Ces cas sont évidemment ceux où la force accélératrice est dirigée vers un centre fixe et fonction de la distance à ce centre. Si l'on trouve plusieurs solutions, on pourra adopter pour U leur somme, et l'on obtiendra ainsi le cas le plus général dans lequel les équations différentielles du mouvement d'un point attiré vers plusieurs centres fixes par des forces fonctions de la distance à ces centres, puissent avoir une intégrale du second degré par rapport aux composantes de la vitesse.

En posant

$$U = \varphi[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2],$$

on trouve

$$\frac{dU}{dx} = 2(x-\alpha)\varphi'[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2],$$

$$\frac{dU}{dy} = 2(y-\beta)\varphi'[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2],$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 4(x-\alpha)^2\varphi'' + 2\varphi',$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = 4(y-\beta)^2\varphi'' + 2\varphi',$$

$$\frac{d^2U}{dx\,dy} = 4(x-\alpha)(y-\beta)\varphi'',$$

et l'équation en U devient

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi''\left[\begin{array}{l} 4(y-\beta)^2(-2axy-b'y-bx+c_1) \\ +4(x-\alpha)^2(2axy+b'y+bx-c_1) \\ +8(x-\alpha)(y-\beta)(ay^2-ax^2-by-b'x+c-c') \end{array}\right] \\ +\varphi'[2(x-\alpha)(6ay+3b)-2(y-\beta)(6ax-3b')]=0. \end{array}\right.$$

Pour que cette équation soit possible, il faut que le rapport des coefficients de φ'' et de φ' soit une fonction de $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$, car ce rapport, en vertu de l'équation même, doit être égal à

$$-\frac{\varphi''[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]}{\varphi'[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]}.$$

Or, examinant les degrés de chacun de ces coefficients, on reconnaît que la condition ne peut être remplie que si le premier est, à un facteur constant près, le produit du second par $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$; l'équation de condition est donc, en réduisant les deux polynômes,

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} -[(2ax+b')y+bx-c_1](y^2-2\beta y+\beta^2-x^2-\alpha^2+2\alpha x) \\ +2(ay^2-by-ax^2-b'x+c-c')[y(x-\alpha)-\beta x+\beta\alpha)] \\ =[-(2a\alpha+b')y+2a\beta x+bx-\alpha b-\beta b'][(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2], \end{array}\right.$$

et en effectuant les calculs, on voit que cette équation sera identique si l'on a les deux relations suivantes :

$$(8)\qquad 2a\alpha\beta+b\alpha+b'\beta=c_1,$$

$$(9)\qquad 2a(\alpha^2-\beta^2)-2\beta b+2\alpha b'=2(c-c'),$$

desquelles on déduira pour α et β deux systèmes de valeurs réelles, comme on le voit en remarquant que les équations précédentes peuvent être considérées comme représentant deux hyperboles équilatères concentriques, et dont l'une a pour axes les asymptotes de l'autre. On peut, par conséquent, admettre deux centres fixes et pas davantage. En introduisant dans l'équation (6) la relation exprimée par l'équation (7), on obtient

$$(10)\qquad 2\varphi''[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]+3\varphi'=0,$$

ou, en posant $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=z$,

$$2z\frac{d^2\varphi}{dz^2}+3\frac{d\varphi}{dz}=0:$$

d'où l'on déduit

$$\varphi(z)=\mathrm{U}=\frac{c}{\sqrt{z}}+c'=\frac{c}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}+c',$$

et, par conséquent, la fonction des forces est inversement proportionnelle à la distance : ce qui a lieu, comme on sait, lorsque la loi d'attraction est celle de la nature.

On peut obtenir une troisième forme de φ qui satisfasse à l'équation (6) en écrivant que, dans cette équation, le coefficient de

$$\varphi'[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]$$

est égal à zéro. On aura ainsi

$$-(2a\alpha+b')y+2a\beta x+bx-\alpha b+\beta b'=0;$$

et comme cette équation doit être identique,

$$2a\alpha+b'=0,\qquad 2a\beta+b=0,\qquad \alpha b=\beta b'.$$

La troisième équation est une conséquence des deux autres, lesquelles donnent

$$\alpha=-\frac{b'}{2a},\qquad \beta=-\frac{b}{2a},$$

et montrent, comme on s'en assure facilement, que ce nouveau centre d'attraction doit être placé au centre commun des hyperboles représentées par les équations (8) et (9), et par suite au milieu de la ligne qui joint les deux autres centres. Dans ce cas, l'équation (6) qui définit la fonction des forces devient

$$\varphi''[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]=0;$$

en sorte que la fonction φ est proportionnelle au carré de la distance et correspond, par conséquent, à une loi d'attraction proportionnelle à la distance.

On peut donc conclure enfin que le seul cas dans lequel les équations différentielles du mouvement d'un point attiré vers des centres fixes puissent avoir une intégrale rationnelle et du second degré par rapport aux composantes de la vitesse, est le cas d'un point attiré vers deux centres fixes suivant la loi de la nature, et, proportionnellement à la distance, vers un troisième centre situé au milieu de la droite qui joint les deux autres.

Les équations

$$2\,\mathrm{PX} + \mathrm{QY} = -\frac{d\mathrm{K}}{dx},$$

$$2\,\mathrm{RY} + \mathrm{QX} = -\frac{d\mathrm{K}}{dy},$$

feraient facilement connaître la forme de K, et achèveraient de déterminer l'intégrale; mais comme elle est bien connue des géomètres, nous nous dispenserons de la former, et il nous suffit d'avoir montré que le problème résolu par Lagrange est le seul qui puisse en présenter de ce genre.

III.

Considérons en particulier le cas où tous les termes du second degré, dans l'intégrale précédente, seraient égaux à zéro, à l'exception du premier, et cherchons les problèmes qui peuvent conduire à une intégrale de la forme

$$(1)\qquad (xy' - yx')^2 + \mathrm{F}(x, y) = \alpha.$$

Cette équation étant différentiée donne la relation

$$2\,(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})(xy' - yx') + \frac{d\mathrm{F}}{dx}x' + \frac{d\mathrm{F}}{dy}y' = 0,$$

et comme elle doit être identiquement satisfaite, on en conclut

$$2\,(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})x + \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0,$$

$$-2\,(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})y + \frac{d\mathrm{F}}{dx} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = -\frac{y}{x},$$

ou

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} = 0,$$

et l'on en conclut que F est une fonction homogène de degré 0 de la forme $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, les seules intégrales de la forme (1) sont donc comprises dans la formule

$$(2) \qquad (xy' - yx')^2 + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha,$$

et elles conviennent à tout problème pour lequel les composantes X et Y de la force satisfont à l'équation

$$2(xY - yX) + \frac{1}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Cette relation étant la seule que l'on doive établir entre X et Y, l'intégrale (2) convient à un nombre infini de problemes différents.

IV.

Lorsque nous avons cherché la forme possible des intégrales qui sont du second degré par rapport à x' et à y', nous avons prouvé d'abord que les termes du second degré doivent être de la forme

$$a(xy' - yx')^2 + (xy' - y'x)(bx' + b'y') + cx'^2 + c'y'^2 + c_1x'y'.$$

Nous avons fait voir ensuite que les termes du premier degré doivent être nuls si le principe des aires n'est pas applicable au problème considéré; afin de n'omettre aucun cas, nous devons maintenant examiner si, parmi les problèmes auxquels s'applique le principe des aires, il en existe dont les équations différentielles admettent en outre une intégrale de la forme considérée.

Nous pouvons admettre, sans diminuer la généralité du résultat, que l'origine des coordonnées soit placée au point vers lequel la force

accélératrice est constamment dirigée. La différence $xy' - yx'$ sera alors constante, et dans l'intégrale cherchée, on pourra supprimer le terme $(xy' - yx')^2$ en le réunissant au second membre

L'intégrale prend alors la forme

$$(xy' - yx')(bx' + b'y') + cx'^2 + c'y'^2 + c_1 x'y' \\ + Sy' + Tx' + K = \alpha;$$

en égalant à zéro la dérivée de α et ayant égard à ce que $xy' - yx'$ est constant par hypothèse, il viendra

$$(xy' - yx')(bX + b'Y) + 2cx'X + 2c'y'Y + c_1(x'Y + y'X) \\ + SY + TX + y'^2\frac{dS}{dy} + x'^2\frac{dT}{dx} + x'y'\left(\frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dy}\right) \\ + \frac{dK}{dx}x' + \frac{dK}{dy}y' = 0.$$

En égalant à zéro les termes du second degré par rapport à x' et y', on a

$$\frac{dS}{dy} = 0, \quad \frac{dT}{dx} = 0, \quad \frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dy} = 0,$$

d'où l'on conclut que S et T sont de la forme

$$S = mx + n, \quad T = -my + n';$$

d'ailleurs les termes indépendants de x' et de y' étant égalés à zéro, donnent

$$SY + TX = 0,$$

et cette condition rapprochée de l'hypothèse

$$Xy - Yx = 0,$$

fait voir que n et n' doivent être nuls, en sorte que les termes du premier degré en x' et y', dans l'intégrale cherchée, se réduisent à

$$m(xy' - yx'),$$

et leur somme étant constante, d'après ce qui a été supposé, on peut

les réunir au second membre et raisonner comme si S et T étaient nuls. On obtient alors, en égalant à zéro le coefficient de x' et celui de y',

$$x(bX + b'Y) + 2c'Y + c_1 X + \frac{dK}{dy} = 0,$$

$$-y(bX + b'Y) + 2cX + c_1 Y + \frac{dK}{dx} = 0,$$

et l'on doit joindre à ces deux équations la condition

$$Xy - Yx = 0,$$

qui exprime que la force est dirigée vers l'origine des coordonnées. On en déduit, par l'élimination de X et de Y,

$$\frac{x(bx + b'y) + 2c'y + c_1 x}{-y(bx + b'y) + 2cx + c_1 y} = \frac{\frac{dK}{dy}}{\frac{dK}{dx}},$$

et l'on pourra prendre pour K une intégrale quelconque de cette équation. Comme, en lui conservant toute sa généralité, elle ne semble pas intégrable par les méthodes connues, nous nous bornerons à traiter le cas où l'on a

$$c = c' = c_1 = 0,$$

l'équation en K devient alors

$$\frac{\frac{dK}{dy}}{\frac{dK}{dx}} = -\frac{x}{y},$$

d'où l'on déduit

$$K = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et les valeurs de X et Y seront données par les équations

$$x(bX + b'Y) = -\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$Xy - Yx = 0,$$

desquelles on déduit

$$X = \frac{-\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}{x(bx + b'y)},$$

$$Y = \frac{-y\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2(bx + b'y)},$$

et l'on voit que X et Y sont des fonctions homogènes de degré -2. Ces fonctions sont d'ailleurs entièrement arbitraires, car $\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$ peut être choisi à volonté. Si l'on veut que la force soit une fonction de la distance, on voit, d'après cela, qu'elle doit être inversement proportionnelle à son carré La loi d'attraction de la nature est donc la seule pour laquelle les équations différentielles du mouvement d'un point attiré vers l'origine des coordonnées puissent avoir une intégrale de la forme

$$(xy' - yx')(bx' + b'y') + F(x, y) = \alpha;$$

on vérifie d'ailleurs bien facilement que les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ont pour intégrale

$$(xy' - yx')(bx' + b'y') + \frac{b'x - by}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \alpha,$$

quelles que soient les constantes b et b'. Cette intégrale se décompose évidemment en deux autres

$$(xy' - yx')x' - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \beta,$$

$$(xy' - yx')y' + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \gamma,$$

qui ont été données par Jacobi dans son Mémoire sur le mouvement d'un point matériel (*Journal de Crelle*, tome XXIV).

V.

Considérons actuellement les intégrales de la forme

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}x'^3 + \mathrm{B}x'^2 y' + \mathrm{C}x' y'^2 + \mathrm{D}y'^3 \\ + \mathrm{A}_1 x'^2 + \mathrm{B}_1 x' y' + \mathrm{C}_1 y'^2 + \mathrm{E}x' + \mathrm{F}y' + \mathrm{K} = \alpha, \end{array}\right.$$

A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, E, F, K désignant des fonctions quelconques de x et de y; en égalant à zéro la dérivée de α, on verra que, dans cette dérivée, les termes du quatrième et du deuxième degré par rapport à x' et y' proviendront de ceux des termes de l'équation (a) qui sont de degré impair par rapport aux mêmes quantités. Les termes de degré pair fourniront au contraire, dans la dérivée, une somme de termes du troisième ou du premier degré; ceux-là devront donc être constants séparément, et, par suite, une intégrale de la forme (a) doit nécessairement se partager en deux autres

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{r} \mathrm{A}x'^3 + \mathrm{B}x'^2 y' + \mathrm{C}y'^2 x' + \mathrm{D}y'^3 + \mathrm{E}x' + \mathrm{F}y' = \alpha_1, \\ \mathrm{A}_1 x'^2 + \mathrm{B}_1 x' y' + \mathrm{C}_1 y'^2 + \mathrm{K} = \alpha_2. \end{array}\right.$$

La seconde de ces deux formes ayant déjà été étudiée, nous nous occuperons seulement de la première.

Si l'on prend la dérivée de α_1 par rapport à t, et qu'on égale à zéro les termes du quatrième degré par rapport à x' et à y', on obtiendra les équations suivantes :

$$(c)\quad \frac{d\mathrm{A}}{dx} = 0,\quad \frac{d\mathrm{A}}{dy} + \frac{d\mathrm{B}}{dx} = 0,\quad \frac{d\mathrm{B}}{dy} + \frac{d\mathrm{C}}{dx} = 0,\quad \frac{d\mathrm{C}}{dy} + \frac{d\mathrm{D}}{dx} = 0,\quad \frac{d\mathrm{D}}{dy} = 0,$$

La première de ces équations montre que A est indépendant de x: posons donc

$$\mathrm{A} = \varphi(y),$$

la dernière donnera de même

$$\mathrm{D} = f(x);$$

Si, après avoir substitué ces valeurs dans les trois autres, on différentie la seconde deux fois par rapport à y, la quatrième deux fois par rapport à x, et qu'on retranche de la somme des équations obtenues la troisième équation différentiée successivement par rapport à x et par rapport à y, on obtiendra la relation

$$\varphi'''(y) + f'''(x) = 0,$$

d'où l'on conclut que $\varphi'''(y)$ et $f'''(x)$ sont deux constantes égales et de signes contraires; on a par conséquent

$$A = \varphi(y) = ay^3 + by^2 + cy + d,$$
$$D = f(x) = -ax^3 + b'x^2 + c'x + d',$$

revenant ensuite aux équations

$$\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} = 0,$$
$$\frac{dC}{dy} + \frac{dD}{dx} = 0,$$

on en conclura

$$B = -3ay^2x - 2bxy - cx + F(y),$$
$$C = \quad 3ax^2y - 2b'xy + c'y + F_1(x),$$

et, en vertu de l'équation

$$\frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dx} = 0,$$

on aura

$$-6axy - 2bx + F'(y) + 6axy - 2b'y + F'_1(x) = 0,$$

d'où l'on conclura

$$F'(y) = 2b'y + c_1, \quad F(y) = b'y^2 + c_1y + c_2,$$
$$F'_1(x) = 2bx - c_1, \quad F_1(x) = bx^2 - c_1x + c_3,$$

et, par suite, l'ensemble des termes du troisième degré dans l'équa-

tion (b) doit être de la forme

$$\begin{aligned} & x'^3(ay^3 + by^2 + cy + d) \\ & + x'^2y'(-3ay^2x - 2bxy - cx + b'y^2 + c_1y + c_2) \\ & + x'y'^2(3ax^2y - 2b'xy + bx^2 - c_1x + c_3) \\ & + y'^3(-ax^3 + b'x^2 + c'x + d'), \end{aligned}$$

et l'on peut grouper les termes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & a(yx' - xy')^3 + (yx' - xy')^2(bx' + b'y') \\ & + (yx' - xy')(cx'^2 + c_1x'y' + c'y'^2) \\ & + dx'^3 + c_2x'^2y' + c_3x'y'^2 + d'y'^3. \end{aligned}$$

VI.

Le développement des conditions auxquelles sont assujettis les coefficients E et F, donne lieu à des calculs fort longs; nous nous contenterons de les développer dans le cas où les termes du troisième degré se réduisent à

$$a(xy' - yx')^3,$$

l'intégrale est alors de la forme

$$(1) \qquad a(yx' - xy')^3 + Ex' + Fy' = \alpha.$$

En égalant à zéro la dérivée de α, on obtient

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & 3a(yx' - xy')^2(yX - xY) + EX + FY \\ & \quad + \frac{dE}{dx}x'^2 + \frac{dF}{dy}y'^2 + \left(\frac{dE}{dy} + \frac{dF}{dx}\right)x'y' = 0, \end{aligned} \right.$$

et, en égalant à zéro les coefficients du premier membre ordonné par rapport à x', y', on déduit

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & 3ay^2(yX - xY) + \frac{dE}{dx} = 0, \quad 3ax^2(yX - xY) + \frac{dF}{dy} = 0, \\ & -6axy(yX - xY) + \frac{dE}{dy} + \frac{dF}{dx} = 0, \\ & EX + FY = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$yX - xY = H,$$

et que l'on différentie la première des équations (3) deux fois par rapport à y, la seconde deux fois par rapport à x, et qu'on retranche de leurs sommes la troisième différentiée une fois par rapport à x et une fois par rapport à y, on obtiendra l'équation

$$y^2 \frac{d^2 H}{dy^2} + 2xy \frac{d^2 H}{dx\,dy} + x^2 \frac{d^2 H}{dx^2} + 6y \frac{dH}{dy} + 6x \frac{dH}{dx} + 6H = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$H = \frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

En reportant ces valeurs de H dans les équations (3), elles deviennent

$$\frac{dE}{dx} = -3a \frac{y^2}{x^2} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{3ay^2}{x^3} \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{dF}{dy} = -3a \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{3a}{x} \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{dE}{dy} + \frac{dF}{dx} = 6a \frac{y}{x} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + 6a \frac{y}{x^2} \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et l'on s'assure facilement que ces équations sont satisfaites en prenant

$$E = -3ay \int \varphi\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right) + 3a \int \frac{y}{x} \psi\left(\frac{y}{x}\right) d\frac{y}{x},$$

$$F = -3ax \int \varphi\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right) - 3a \int \psi\left(\frac{y}{x}\right) d\frac{y}{x}.$$

De sorte que, les fonctions φ et ψ restant arbitraires, l'intégrale considérée conviendra toutes les fois que X et Y seront déterminés par les deux équations

$$EX + FY = 0,$$

$$Xy - Yx = H = \frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^3} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

VII.

Cherchons, pour dernier problème, s'il peut exister, des intégrales de la forme

$$\alpha = \frac{Py' + Qx' + R}{Ay' + Bx' + C},$$

A, B, C, P, Q, R désignant des fonctions quelconques de x et de y.

En égalant à zéro la dérivée de α, on trouve

$$\begin{aligned} 0 = &\left[\frac{dP}{dy}y'^2 + \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right)x'y' + \frac{dQ}{dx}x'^2 + PY + QX + \frac{dR}{dx}x' + \frac{dR}{dy}y'\right](Ay' + Bx' + C) \\ &- \left[\frac{dA}{dy}y'^2 + \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy}\right)x'y' + \frac{dB}{dx}x'^2 + AY + BX + \frac{dC}{dx}x' + \frac{dC}{dy}y'\right](Py' + Qx' + R); \end{aligned}$$

en égalant à zéro les coefficients des termes du troisième degré par rapport à x' et à y', on trouve

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &A\frac{dP}{dy} - P\frac{dA}{dy} = 0, \quad B\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dB}{dx} = 0, \\ &A\frac{dP}{dx} - P\frac{dA}{dx} + A\frac{dQ}{dy} - Q\frac{dA}{dy} + B\frac{dP}{dy} - P\frac{dB}{dy} = 0, \\ &B\frac{dP}{dx} - P\frac{dB}{dx} + B\frac{dQ}{dy} - Q\frac{dB}{dx} + A\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dA}{dx} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux premières équations (2) prouvent que le rapport $\frac{P}{A}$ est indépendant de y et $\frac{Q}{B}$ indépendant de x. Posons donc

$$P = Af(x),$$
$$Q = B\varphi(y);$$

en introduisant ces résultats dans la troisième équation, on obtient

$$(3) \quad \left(A\frac{dB}{dy} - B\frac{dA}{dy}\right)[\varphi(y) - f(x)] + A^2 f'(x) + AB\varphi'(y) = 0,$$

et, en divisant par A^2,

$$\frac{d\frac{B}{A}}{dy}[\varphi(y) - f(x)] + \frac{B}{A}\varphi'(y) + f'(x) = 0,$$

équation linéaire du premier ordre dont l'intégrale est

$$(4)\qquad \frac{B}{A} = \frac{F(x) - yf'(x)}{\varphi(y) - f(x)},$$

$F(x)$ désignant une fonction arbitraire de x. En opérant sur la quatrième des équations (2) comme on a opéré sur la troisième, on trouverait

$$\frac{A}{B} = \frac{F_1(y) - x\varphi'(y)}{f(x) - \varphi(y)},$$

et, en multipliant ces équations membre à membre,

$$(5)\qquad [\varphi(y) - f(x)]^2 = -[F(x) - yf'(x)][F_1(y) - x\varphi'(y)].$$

Cette équation suffit, comme nous allons le montrer, pour déterminer les fonctions φ et f.

L'équation (5) peut en effet s'écrire

$$(6)\qquad -\frac{[\varphi(y) - f(x)]^2}{F(x) - yf'(x)} = F_1(y) - x\varphi'(y).$$

Si, dans cette équation, on attribue à x une seconde valeur x_1, elle devient

$$(7)\qquad -\frac{[\varphi(y) - f(x_1)]^2}{F(x_1) - yf'(x_1)} = F_1(y) - x_1\varphi'(y),$$

et l'on trouve, en retranchant ces deux équations l'une de l'autre,

$$(8)\qquad -\frac{[\varphi(y) - f(x)]^2}{F(x) - yf'(x)} - \frac{[\varphi(y) - f(x_1)]^2}{F(x_1) - yf'(x_1)} = (x - x_1)\varphi'(y);$$

si, dans cette équation, on remplace x et x_1, qui sont arbitraires, par de nouvelles valeurs x' et x'_1, on aura

$$(9)\qquad \frac{[\varphi(y) - f(x')]^2}{F(x') - yf'(x')} - \frac{\varphi(y) - f(x'_1)]^2}{F(x'_1) - yf'(x'_1)} = (x' - x'_1)\varphi'(y):$$

et, en égalant les valeurs de $\varphi'(y)$ fournies par les équations (8) et (9),

on a enfin

$$(10)\quad \frac{\dfrac{[\varphi(y)-f(x)]^2}{F(x)-yf'(x)}-\dfrac{[\varphi(y)-f(x_1)]^2}{F(x_1)-yf'(x_1)}}{x-x_1}=\frac{\dfrac{[\varphi(y)-f(x')]^2}{F(x')-yf'(x')}-\dfrac{[\varphi(y)-f'x'_1)]^2}{F(x'_1)-yf(x'_1)}}{x'-x'_1},$$

équation du second degré de laquelle on pourra déduire la valeur de $\varphi(y)$, cette valeur étant la seule possible, mais pouvant ne pas convenir, car les conditions trouvées sont loin d'être suffisantes.

En résolvant l'équation (10) par rapport à $\varphi(y)$, on trouvera pour cette fonction une valeur qui ne renfermera pas d'autre irrationnelle qu'un radical du second degré : on voit même que ce radical doit disparaître, car, dans l'équation (10), x, x_1, x', x'_1 étant arbitraires, on peut varier à l'infini les coefficients de cette équation et, par suite, $\varphi(y)$ étant racine commune à plusieurs équations du second degré, doit être une fonction rationnelle de leurs coefficients. Mais nous ne ferons pas usage de ce résultat, dont la démonstration n'est pas suffisamment rigoureuse. On peut objecter en effet que les coefficients de l'équation (10) peuvent rester invariables ou conserver des rapports constants lorsque l'on change les valeurs attribuées à x.

Supposons donc que l'on ait

$$\varphi(y)=\frac{\varphi_1(y)+\sqrt{\varphi_2(y)}}{\varphi_3(y)},$$

et que l'on ait trouvé de même

$$f(x)=\frac{f_1(x)+\sqrt{f_2(x)}}{f_3(x)}.$$

Connaissant f et φ, l'équation (5) fera connaître facilement $F_1(y)$ et $F(x)$. Si en effet, dans cette équation, on fait $x=0$, elle deviendra

$$(11)\qquad [\varphi(y)-f(0)]^2=-[F(0)-yf'(0)][F_1(y)],$$

et l'on en déduira $F_1(y)$. L'hypothèse $y=0$ fera de même connaître $F(x)$. Si l'on remet ces valeurs dans l'équation (5), les deux membres contiendront $\sqrt{\varphi_2(y)}$ et $\sqrt{f_2(x)}$; or il est bien facile de voir que l'équation étant vraie pour toutes les valeurs de x et de y, doit être véri-

fiée quel que soit le signe attribué à chacun des radicaux et que pour chaque système des valeurs de x et de y les deux membres doivent avoir quatre valeurs égales chacune à chacune, car, toutes réductions faites, les termes rationnels doivent être égaux dans les deux membres, et il doit en être de même des coefficients de chaque radical. Cela posé, les deux membres de l'équation

$$(5) \qquad [\varphi(y) - f(x)]^2 = -[F(x) - yf'(x)][F(y) - x\varphi'(y)]$$

doivent s'annuler en même temps, et je dis de plus que tout système de valeurs qui annulent un des facteurs du second membre doit en même temps annuler l'autre. Supposons, en effet, s'il est possible, que l'on ait

$$F(x) = yf'(x)$$

sans avoir en même temps

$$F(y) = x\varphi'(y),$$

on aura évidemment, pour ces valeurs de x et de y,

$$\varphi(y) - f(x) = 0.$$

Cela posé, changeons infiniment peu y et donnons-lui la valeur $y + dy$, les deux membres devront rester égaux; or le premier deviendra

$$\varphi'(y)^2\, dy^2,$$

et le second sera le produit de

$$f'(x)\, dy$$

par une quantité finie. x et y sont liés l'un à l'autre, mais chacun d'eux isolément est arbitraire ; $\varphi'(y)$ et $f'(x)$ ne sont donc ni nuls, ni infinis, et, par suite, les deux membres de notre équation seraient des infiniment petits d'ordre différent et ne peuvent être égaux.

L'équation (5) ayant lieu quel que soit le signe des radicaux contenus dans $f(x)$ et dans $\varphi(y)$, cette démonstration s'applique aux deux valeurs de chacun des facteurs considérés, et, par suite, tout système de valeurs qui annule l'un des facteurs doit annuler en même temps les deux valeurs de l'autre, et comme cela est évidemment im-

possible, on ne doit pas admettre que les fonctions puissent avoir deux valeurs, et elles sont nécessairement rationnelles.

L'équation (5) ayant lieu entre polynômes rationnels, pour que les deux équations

$$F(x) - yf'(x) = 0,$$
$$F_1(y) - x\varphi'(y) = 0$$

aient les mêmes solutions, il faut nécessairement que la première soit du premier degré par rapport à x et la seconde du premier degré par rapport à y; on doit avoir, par conséquent,

$$\frac{F(x)}{f'(x)} = \frac{Px + Q}{P'x + Q'}, \quad \frac{F_1(y)}{\varphi'(y)} = \frac{Ay + B}{A'y + B'};$$

mais, d'après l'équation (11), $F_1(y)$ est de la forme

$$\frac{[\varphi(y) - c]^2}{my + n},$$

et $F(x)$ sera de même de la forme

$$\frac{[\varphi f(x) - c']^2}{m'x + n'},$$

c, c', m, n, m', n', désignant des constantes; d'après cela les équations précédentes deviennent

$$\frac{[f(x) - c']^2}{f'(x)(m'x + n')} = \frac{Px + Q}{P'x + Q'},$$
$$\frac{[\varphi(y) - c]^2}{\varphi'(y)(my + n)} = \frac{Ay + B}{(A'y + B')};$$

on en déduit

$$\frac{1}{f(x) - c} = \int \frac{c'(P'x + Q')\,dx}{(m'x + n')(px + q)},$$
$$\frac{1}{[\varphi(y) - c]} = \int \frac{c'(A'y + B')\,dy}{(Ay + B)(my + n)},$$

et, d'après les valeurs connues des intégrales de fractions rationnelles, on voit que $\varphi(y)$ et $f(x)$ ne peuvent être rationnels que si les facteurs du dénominateur sont égaux dans les deux différentielles et l'on trouve

alors pour ces fractions des expressions de la forme

$$\varphi(y) = \frac{g + hy}{g' + h'y}, \quad f(x) = \frac{k + lx}{k' + l'x};$$

et, en substituant dans l'équation (5), on verra facilement qu'elle est satisfaite par les valeurs de $\varphi(y)$ et $f(x)$, combinées avec celles qui en résultent pour $F(x)$ et $F_1(y)$ pourvu qu'il existe entre h, h', l, l', la relation

$$hl' - lh' = 0.$$

Reprenons actuellement la formule (4), en y introduisant les valeurs de f et φ ainsi que les valeurs qui en résultent pour F et F_1, elle deviendra

$$\frac{B}{A} = \frac{g' + h'y}{k' + l'x},$$

et si l'on reprend les deux formules

$$P = Af(x) = A\frac{k + lx}{k' + l'x},$$

$$Q = B\varphi(y) = B\frac{g + hy}{g' + h'y},$$

on voit que P, Q, A, B sont respectivement proportionnels aux quatre binômes $k + lx$, $g + hy$, $k' + l'x$, $g' + h'y$, en sorte que l'on peut prendre

$$P = k + lx, \quad Q = g + hy,$$

$$A = k' + l'x, \quad B = g' + h'y,$$

et l'intégrale cherchée doit être de la forme

$$\frac{y'(k + lx) + x'(g + hy) + R}{y'(k' + l'x) + x'(g' + h'y) + C} = \alpha,$$

R et C désignant deux fonctions inconnues de x et de y, et les constantes h, h', l, l' satisfaisant à l'équation

$$hl' - h'l = 0.$$

VIII.

Cherchons maintenant quels sont les problèmes dont les équations différentielles admettent une intégrale de la forme

$$(1)\qquad \frac{y'(k+lx)+x'(g+hy)+\mathrm{R}}{y'(k'+l'x)+x'(g'+a'y)+\mathrm{C}}=\alpha.$$

En différentiant cette équation, on obtient

$$(2)\quad \begin{cases} 0=\left[\mathrm{Y}(k+lx)+y'lx'+\mathrm{X}(g+hy)+hx'y'+\frac{d\mathrm{R}}{dx}x'+\frac{d\mathrm{R}}{dy}y'\right] \\ \times\left[y'(k'+l'x)+x'(g'+h'y)+\mathrm{C}\right] \\ -\left[\mathrm{Y}(k'+l'x)+y'(l'x')+\mathrm{X}(g'+h'y)+h'x'y'+\frac{d\mathrm{C}}{dx}x'+\frac{d\mathrm{C}}{dy}y'\right] \\ \times\left[y'(k+lx)+x'(g+hy)+\mathrm{R}\right]. \end{cases}$$

Si l'on égale à zéro les coefficients de $x'y'^2$ et de x'^2y', on aura

$$(3)\qquad \begin{cases} (l+h)(k'+l'x)-(l'+h')(k+lx)=0, \\ (l+h)(g'+h'y)-(l'+h')(g+hy)=0; \end{cases}$$

en ayant égard à la relation

$$(4)\qquad hl'-lh'=0,$$

ces deux équations deviennent

$$(5)\qquad \begin{cases} lk'-l'k+hk'-h'k=0, \\ lg'-gl'+hg'-gh'=0; \end{cases}$$

or l'équation (4) montrant que $\frac{h}{l}$ et $\frac{h'}{l'}$ sont égaux, soit m la valeur commune de ces deux rapports, l'équation (5) devient

$$(lk'-l'k)(1+m)=0,\quad (hg'-h'g)\left(\frac{1}{m}+1\right)=0;$$

en sorte qu'il faut admettre l'une des deux hypothèses

$$\begin{cases} lk'=l'k, \\ hg'=h'g, \end{cases}$$
$$m=-1.$$

La première hypothèse doit être écartée, car, en l'adoptant, on voit sans peine que la division du numérateur de la formule (1) par son dénominateur peut s'effectuer et que la valeur de α serait entière par rapport à x' et à y'; il faut donc admettre $m = -1$, c'est-à-dire

$$h = -l,$$
$$h' = -l',$$

ce qui met l'intégrale sous la forme

$$(6) \qquad \frac{l(xy' - yx') + ky' + gx' + \mathrm{R}}{l'(xy' - yx') + k'y' + g'x' + \mathrm{C}} = \alpha,$$

et l'équation (2) devient

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & \left[l(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) + k\mathrm{Y} + g\mathrm{X} + \frac{d\mathrm{R}}{dx}x' + \frac{d\mathrm{R}}{dy}y'\right] \\ & \times [l'(xy' - yx') + k'y' + g'x' + \mathrm{C}] \\ & - \left[l'(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) + k'\mathrm{Y} + g'\mathrm{X} + \frac{d\mathrm{C}}{dx}x' + \frac{d\mathrm{C}}{dy}y'\right] \\ & \times [l(xy' - yx') + ky' + gx' + \mathrm{R}]; \end{aligned}\right.$$

égalons à zéro les coefficients de x'^2, de y'^2 et de $x'y'$, nous aurons

$$(8) \qquad (g' - l'y)\frac{d\mathrm{R}}{dx} - (g - ly)\frac{d\mathrm{C}}{dx} = 0,$$

$$(9) \qquad (k' + l'x)\frac{d\mathrm{R}}{dy} - (k + lx)\frac{d\mathrm{C}}{dy} = 0,$$

$$(10) \quad (g' - l'y)\frac{d\mathrm{R}}{dy} - (g - ly)\frac{d\mathrm{C}}{dy} + (k' + l'x)\frac{d\mathrm{R}}{dx} - (k + lx)\frac{d\mathrm{C}}{dx} = 0.$$

Les équations (8) et (9) s'intègrent immédiatement et donnent

$$(11) \qquad (g' - l'y)\mathrm{R} - (g - ly)\mathrm{C} = f(y),$$

$$(12) \qquad (k' + l'x)\mathrm{R} - (k + lx)\mathrm{C} = \varphi(x);$$

si l'on différentie ces deux équations, la première par rapport à y et la seconde par rapport à x, et qu'on les ajoute ensuite, on trouve, en ayant égard à l'équation (10),

$$f'(y) + \varphi'(x) = 0,$$

$f'(y)$ et $\varphi'(x)$ sont donc deux constantes égales et de signes contraires, B et $-$ B; on a donc

$$(13)\qquad (g'-l'y)\mathrm{R}-(g-ly)\mathrm{C}=\mathrm{B}y+\mathrm{D},$$

$$(14)\qquad (k'+l'x)\mathrm{R}-(k+lx)\mathrm{C}=-\mathrm{B}x+\mathrm{D}';$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{R}=\frac{(-\mathrm{B}x+\mathrm{D}')(g-ly)-(k+lx)(\mathrm{B}y+\mathrm{D})}{(gk'-g'k)+(l'g-lg')x+(l'k-lk')y},$$

$$\mathrm{C}=\frac{-(\mathrm{B}y+\mathrm{D})(k'+l'x)+(-\mathrm{B}x+\mathrm{D}')(g'-l'y)}{(gk'-g'k)+(l'g-lg')x+(l'k-lk')y};$$

ou, en réduisant,

$$(15)\qquad \mathrm{R}=\frac{\mathrm{D}'g-k\mathrm{D}-(\mathrm{B}k+\mathrm{D}'l)y-(\mathrm{B}g+\mathrm{D}l)x}{(gk'-g'k)+(l'g-lg')x+(l'k-lk')y},$$

$$(16)\qquad \mathrm{C}=\frac{\mathrm{D}'g'-\mathrm{D}k'-y(\mathrm{B}k'+\mathrm{D}'l')-x(\mathrm{B}g'+\mathrm{D}l')}{gk'-g'k+(l'g-lg')x+(l'k-lk')y};$$

si l'on égale ensuite à zéro les termes en x', les termes en y' et ceux qui sont indépendants de x' et de y' dans l'équation (7), on aura, après quelques réductions,

$$(17)\qquad \mathrm{X}[(lx+k)(l'y-g')-(l'x+k')(ly-g)]=\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dy}-\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dy},$$

$$(18)\qquad \mathrm{Y}[(ly-g)(l'x+k')-(lx+k)(l'y-g')]=\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dx}-\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dx},$$

$$\mathrm{C}[(lx+k)\mathrm{Y}-(ly-g)\mathrm{X}]=\mathrm{R}[(l'x+k')\mathrm{Y}-(l'y-g')\mathrm{X}];$$

les deux premières équations détermineront X et Y et la troisième donnera l'équation de condition

$$\frac{\mathrm{D}'g'-\mathrm{D}k'-y(\mathrm{B}k'+\mathrm{D}'l')-x(\mathrm{B}g'+\mathrm{D}l')}{\mathrm{D}'g-k\mathrm{D}-y(\mathrm{B}k+\mathrm{D}'l)-x(\mathrm{B}g+\mathrm{D}l)}$$

$$=\frac{(l'x+k')\left(\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dx}-\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dx}\right)-(l'y-g')\left(\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dy}-\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dy}\right)}{(lx+k)\left(\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dx}-\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dx}\right)-(ly-g)\left(\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dy}-\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dy}\right)};$$

mais, d'après les valeurs trouvées pour R et C, on a

$$\frac{C\frac{dR}{dx} - R\frac{dC}{dx}}{C\frac{dR}{dy} - R\frac{dC}{dy}} = \frac{By + D}{-Bx + D'},$$

et d'après cela l'équation précédente devient

$$\frac{D'g' - Dk' - y(Bk' + D'l') - x(Bg' + Dl')}{D'g - kD - y(Bk + D'l) - x(Bg + Dl)}$$
$$= \frac{(l'x + k')(By + D) + (l'y - g')(-Bx + D')}{(lx + k)(By + D)D + (ly + g)(-Bx + D')},$$

équation identique.

Les constantes qui figurent dans les valeurs de R et de C peuvent donc être prises arbitrairement, et l'équation

$$\alpha = \frac{l(xy' - yx') + ky' + gx' + \frac{D'g - kD - (Bk + D'l)y - (Bg + Dl)x}{gk' - g'k + (l'g - lg')x + (l'k - lk')y}}{l'(xy' - yx') + k'y' + g'x' + \frac{D'g' - k'D' - (Bk' + D'l')y - (Bg' + Dl')x}{(gk' - g'k) + (l'g - g'l)x + (l'k - k'l)y}}$$

sera une intégrale des équations différentielles du mouvement d'un point sollicité par les forces dont les composantes données par les équations (17), (18) sont, toutes réductions faites,

$$X = \frac{[(Bx + D')[B(gk' - g'k) + D'(gl' - g'l) + D(k'l - kl')][(D'g - kD) - (Bk + D'l)y - (Bg + Dl)x]^2}{[(gk' - l'k) + (l'g - lg')x + (l'k - lk')y]^3},$$

$$Y = \frac{(By + D)}{-Bx + D'}X,$$

et, en disposant à volonté des constantes renfermées dans ces formules, on obtiendra tous les problèmes pour lesquels il peut exister une intégrale de la forme

$$\alpha = \frac{Py' + Qx' + R}{Ay' + Bx' + C}.$$

SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je nomme ainsi certaines quantités qui dépendent d'un nombre entier m, et qui sont tellement définies qu'on peut toujours les calculer quand ce nombre est donné : il est dès lors naturel de les exprimer par un signe analogue à celui qui marque les fonctions d'une variable continue. C'est ainsi que nous représenterons, avec Euler, par $\int m$ la somme des diviseurs d du nombre m, y compris 1 et m : c'est encore ainsi qu'avec M. Gauss, nous dénoterons par $\varphi(m)$ le nombre des entiers premiers à m que contient la suite $1, 2, \ldots, m$.

On a

$$\int 1 = 1, \quad \varphi(1) = 1,$$

et pour un nombre quelconque décomposé en ses facteurs premiers :

$$m = a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma,$$

on trouve facilement

$$\int m = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdots\cdots \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1},$$

et

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{c}\right).$$

Les fonctions $\varphi(m)$ et $\int m$ ont d'ailleurs beaucoup de propriétés remarquables. En désignant par la caractéristique $\sum$ une somme concernant tous les diviseurs d de m, on a

$$(1) \qquad \sum \varphi(d) = m.$$

comme l'a d'abord prouvé M. Gauss. En posant $m = d.\delta$, on a aussi, comme je l'ai déjà dit dans un des derniers cahiers du Journal,

$$(2) \qquad \sum\left(d\int d\right) = \sum\left(\delta^2\int d\right).$$

Il existe un grand nombre de formules semblables, dont plusieurs offrent de l'intérêt, et où figurent avec $\varphi(m)$ et $\int m$ d'autres fonctions numériques analogues. Je profite de l'espace qui reste libre dans cette feuille pour écrire quelques-unes de ces formules : celles que je vais indiquer sont toutes très-faciles à établir et à vérifier ; mais la place me manque pour ajouter les démonstrations, si courtes qu'elles soient : je me borne donc à un simple énoncé.

Je conserve les définitions et les notations précédentes ; et de plus je désigne par $\zeta(m)$ le nombre des diviseurs de m. On a généralement

$$\zeta(m) = (1+\alpha)(1+\beta)\ldots(1+\gamma),$$

par suite

$$\zeta(1) = 1,\ \zeta(2) = 2,\ \zeta(3) = 2,\ \zeta(4) = 3,\ \zeta(5) = 2,\ \zeta(6) = 4,\ \text{etc.}$$

Enfin je représente par $\theta(m)$ le nombre des décompositions de m en deux facteurs premiers entre eux. On sait que

$$\theta(m) = 2^{\nu},$$

ν désignant le nombre des facteurs premiers distincts a, b,..., c de $m = a^{\alpha} b^{\beta}\ldots c^{\gamma}$. Ainsi

$$\theta(1) = 1,\ \theta(2) = 2,\ \theta(3) = 2,\ \theta(4) = 2,\ \theta(5) = 2,\ \theta(6) = 4,\ \text{etc.}$$

Cela posé, je trouve d'abord que

$$(3) \qquad \sum\left(\int d\right) = \sum[\delta.\zeta(d)].$$

Les sommations indiquées s'appliquent à tous les diviseurs d de m, et l'on se souvient que $m = d.\delta$. Soit par exemple $m = 6$, ce qui donne $d = 1, 2, 3, 6$ et $\delta = 6, 3, 2, 1$; on devra avoir

$$\int 1 + \int 2 + \int 3 + \int 6 = 6\zeta(1) + 3\zeta(2) + 2\zeta(3) + \zeta(6),$$

c'est-à-dire

$$1 + 3 + 4 + 12 = 6 + 3.2 + 2.2 + 4,$$

ce qui est exact, la somme aux deux membres étant 20.

En second lieu, on a

$$(4) \qquad \sum [\varphi(d)\zeta(\delta)] = \int m.$$

Soit toujours comme exemple $m = 6$; nous devrons avoir

$$\varphi(1)\zeta(6) + \varphi(2)\zeta(3) + \varphi(3)\zeta(2) + \varphi(6)\zeta(1) = \int 6 = 12,$$

et c'est en effet 12 qu'on trouve pour la valeur du premier membre, c'est-à-dire de

$$1.4 + 1.2 + 2.2 + 2.1.$$

Nous avons encore cette formule

$$(5) \qquad \sum [\theta(d)\zeta(\delta)] = \zeta(m)^2.$$

Pour $m = 6$, cela veut dire que

$$\theta(1)\zeta(6) + \theta(2)\zeta(3) + \theta(3)\zeta(2) + \theta(6)\zeta(1) = \zeta(6)^2;$$

ainsi, en mettant pour les expressions θ et ζ leurs valeurs, on doit avoir

$$1.4 + 2.2 + 2.2 + 4.1 = 4^2,$$

ce qui est exact.

Je puis aussi démontrer que

$$(6) \qquad \sum\left(\int d. \int \delta\right) = \sum [d.\zeta(d)\zeta(\delta)].$$

Pour $m = 6$, cette formule donne

$$\int 1. \int 6 + \int 2. \int 3 + \int 3. \int 2 + \int 6. \int 1$$
$$= \zeta(1)\zeta(6) + 2\zeta(2)\zeta(3) + 3\zeta(3)\zeta(2) + 6\zeta(6)\zeta(1),$$

ce qui revient à

$$12 + 3.4 + 4.3 + 12 = 4 + 2.2.2 + 3.2.2 + 6.4;$$

et des deux parts, en effet, la somme est 48.

Pour écrire la dernière formule, je dois distinguer parmi les diviseurs de m ceux qui sont des carrés : 1 par exemple sera toujours un tel diviseur, et il y en aura d'autres si les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ de la formule

$$m = a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma,$$

ne sont pas tous égaux à l'unité. Je désignerai ces diviseurs par D^2, et je marquerai d'un accent le signe $\sum$ quand il ne devra s'appliquer qu'à eux. Ces conventions faites, on aura

$$(7) \qquad \sum [\zeta(d)\zeta(\delta)] = \sum{}' \left[\zeta\left(\frac{m}{D^2}\right)^2\right].$$

Ainsi pour $m = 6$, où l'on n'a qu'un seul diviseur carré $D^2 = 1$, il vient

$$\zeta(1)\zeta(6) + \zeta(2)\zeta(3) + \zeta(3)\zeta(2) + \zeta(6)\zeta(1) = \zeta(6)^2,$$

c'est-à-dire

$$1.4 + 2.2 + 2.2 + 4.1 = 4^2,$$

ce qui est exact. De même, pour $m = 32$, où D^2 a ces trois valeurs 1, 4, 16, on doit trouver égales entre elles les deux sommes

$$\zeta(1)\zeta(32) + \zeta(2)\zeta(16) + \zeta(4)\zeta(8) + \zeta(8)\zeta(4) + \zeta(16)\zeta(2) + \zeta(32)\zeta(1),$$

et

$$\zeta(32)^2 + \zeta(8)^2 + \zeta(2)^2 :$$

la valeur commune est en effet 56.

Ces théorèmes (dont plusieurs peut-être ont déjà été donnés sans que je le sache) pourront servir à exercer les jeunes géomètres, et dans ce but j'en présenterai d'autres encore dans un prochain article : je pourrai ajouter alors une démonstration.

DES TERMES QUI COMPLÈTENT LA FORMULE GÉNÉRALE DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE DANS LE CAS DU FROTTEMENT;

PAR M. E. BRASSINE.

Le principe des vitesses virtuelles, qui sert de base à la Mécanique analytique, a été étendu et généralisé par Lagrange au moyen de la méthode des multiplicateurs. Par cette méthode, les équations de condition, entre les points du système, sont employées comme des forces, et toutes les questions sont ramenées au cas le plus simple, celui d'un système libre. Si, par exemple, un point x', y', z' est assujetti à demeurer sur une surface $L = 0$, on ajoute aux moments des forces le terme $\lambda\delta L$; λ étant un multiplicateur dont le rapport à la pression normale N est donné par la relation

$$N = \lambda\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2}.$$

Si la pression N fait naître un frottement fN, que nous supposerons d'après Coulomb indépendant de l'étendue des surfaces en contact, nous pourrons considérer dans le plan tangent à la surface $L = 0$ un point retenu par une force de résistance fN, résistance qui devra entrer dans la formule d'équilibre, bien que sa direction ne soit pas complétement déterminée; pour cet effet, prenons les équations de la normale au point x', y', z' de la surface $L = 0$: ces équations sont

$$\frac{dL}{dz'}(x - x') - \frac{dL}{dx'}(z - z') = 0, \quad \frac{dL}{dz'}(y - y') - \frac{dL}{dy'}(z - z') = 0.$$

En désignant par I une quantité indéterminée, un plan normal quel-

conque passant par le même point aura pour équation

$$\frac{dL}{dz'}(x - x') + I\frac{dL}{dz'}(y - y') - \left(\frac{dL}{dx'} + I\frac{dL}{dy'}\right)(z - z') = 0;$$

nous pourrons supposer la résistance f N perpendiculaire à ce plan, et exprimer les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes des x, y, z par

$$\frac{1}{R}\frac{dL}{dz'}, \quad \frac{I}{R}\frac{dL}{dz'}, \quad -\frac{1}{R}\left(\frac{dL}{dx'} + I\frac{dL}{dy'}\right),$$

en faisant

$$R = \sqrt{(1 + I^2)\left(\frac{dL}{dz'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dx'} + I\frac{dL}{dy'}\right)^2}.$$

Mais la résistance fN agit en sens contraire d'une force perpendiculaire au plan normal, dont le moment serait estimé d'après le procédé de Lagrange; par conséquent, le terme qui devra être ajouté à $\lambda\delta$L dans le cas du frottement sera

$$-\frac{fN}{R}\left[\frac{dL}{dz'}\delta x' + I\frac{dL}{dz'}\delta y' - \left(\frac{dL}{dx'} + I\frac{dL}{dy'}\right)\delta z'\right].$$

Les conditions du problème feront trouver dans chaque cas les valeurs de λ, I, et par suite de N et fN.

Si les surfaces en contact, dans un système de corps, sont de nature différente, il faudra pour chacune d'elles prendre une valeur particulière du coefficient f. Par cette extension de la formule de Lagrange, les questions d'équilibre dans lesquelles on fait entrer la considération du frottement, sont ramenées à un procédé analytique uniforme. De plus, la généralité de la méthode fait ressortir dans quelques cas l'insuffisance de solutions fondées sur des constructions géométriques.

Nous nous bornerons à indiquer succinctement l'application de la formule générale à deux problèmes :

1°. Supposons un point sollicité par des forces P, Q,..., en équilibre sur un héliçoïde, en tenant compte du frottement du point sur la surface.

L'équation d'un héliçoïde dont les génératrices font un angle $\frac{\pi}{2} - \theta$

avec l'axe des z est

$$L = z - r \operatorname{tang} \beta - r \operatorname{tang} \alpha . \varphi - \gamma = 0 :$$

α est l'angle avec l'horizon des hélices que l'on obtient en assignant diverses valeurs à r; r et φ sont comptés sur un plan perpendiculaire aux z, et le pas des hélices $2\pi r \operatorname{tang} \alpha$ est constant.

Si le point placé sur l'héliçoïde a pour coordonnées z, r, φ, nous pouvons prendre le rayon r pour axe des x, une perpendiculaire à r pour axe des y, $dx = dr$, $dy = rd\varphi$; par suite et sans rapporter l'héliçoïde à ces nouvelles coordonnées, on aura pour le point que nous considérons

$$\frac{dL}{dr} = 1, \quad \frac{dL}{dx} = - \operatorname{tang} \beta, \quad \frac{dL}{rd\varphi} = \frac{dL}{dy} = - \operatorname{tang} \alpha.$$

Si de plus ce point est retenu à une distance constante r de l'axe des z, la relation $x = r$ introduira dans l'équation d'équilibre un terme $\mu \delta x$. Mais, dans ce cas, le frottement qui n'a lieu que par un glissement possible du point sur la surface, sera nul dans le sens des x; la composante $\frac{-fN}{R}$, dans cette direction, étant égale à zéro, R et par suite I deviendra infini. Avec ces données, on peut écrire immédiatement les trois équations d'équilibre d'un point sollicité par des forces P, Q, N, $-f$ N, et l'on trouve les résultats connus.

Si l'on suppose $\alpha = 0$, $\beta = 0$. les formules de l'héliçoïde deviendront celles du plan incliné.

2°. Pour trouver l'équilibre d'un tour, dont les tourillons sont en contact avec deux surfaces $L = 0$, $L' = 0$, nous supposerons l'axe du tour pris pour la ligne des x, et les tourillons cylindriques de rayons ρ, ρ' en contact avec des plans tangents aux surfaces $L = 0$, $L' = 0$ aux points m, m'. Ces plans touchant aussi les tourillons seront perpendiculaires au plan des y, z, et leurs équations auront la forme

$$z - ay + \rho \sqrt{1 + a^2} = 0,$$

$$z - a'y + \rho' \sqrt{1 + a'^2} = 0.$$

Avec ces données, et en appelant N, N′ les pressions exercées au contact des tourillons, et P, P′,..., Q, Q′,..., les forces qui sollicitent le système, il suffira d'écrire les six équations d'équilibre d'un corps solide. Tous les cas particuliers se déduiront aisément des formules générales.

DÉMONSTRATION DE CE THÉORÈME :

TOUT NOMBRE IMPAIR EST LA SOMME DE QUATRE CARRÉS DONT DEUX SONT ÉGAUX;

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

Le moyen de démonstration employé ici l'a déjà été par M. Lejeune-Dirichlet (*Journal de Crelle*, tome XL, page 228), pour prouver que tous les nombres de forme $4k+2$, $8k+1$, $8k+3$ et $8k+5$ sont la somme de trois carrés sans facteurs communs.

I. THÉORÈME. — *Tout nombre impair* $2n+1 = x^2+y^2+2z^2$, x, y, z *étant des entiers sans diviseur commun.*

Démonstration. Soit

$$(1) \qquad ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'zx+2c'xy,$$

une forme ternaire de déterminant -2, ou telle que l'on ait

$$(2) \qquad aa'^2+bb'^2+cc'^2-abc-2a'b'c'=-2.$$

D'après le théorème de Seeber [*], on reconnaît sans peine que la réduite des formes (1) est unique, savoir

$$(3) \qquad X^2+Y^2+2Z^2;$$

on peut donc passer de (3) à (1) par la substitution

$$X=\alpha x+\beta y+\gamma z, \quad Y=\alpha' x+\beta' y+\gamma' z, \quad Z=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z$$

de déterminant 1. De sorte qu'on trouve

$$a=\alpha^2+\alpha'^2+2\alpha''^2,$$

les nombres α, α', α'' étant sans diviseurs communs.

[*] Voir sur ce théorème le cahier de Novembre 1856.

Il suffit donc de montrer que l'équation (2) peut être résolue en nombres entiers, a étant un nombre impair quelconque $2n+1$.

Considérons le cas particulier $b'=1$, $c'=0$ (comme le fait M. Lejeune-Dirichlet dans l'article cité plus haut), l'équation (2) devient

$$(4) \qquad b = a(bc - a'^2) - 2 = a\Delta - 2.$$

Le nombre $bc - a'^2$ étant essentiellement positif, soit

$$bc - a'^2 = \Delta = 2t + 1;$$

alors l'équation (4) donne

$$b = 2at + a - 2;$$

comme a est impair, $2a$ et $a-2$ sont premiers entre eux; posant $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, on aura une suite de nombres en progression arithmétique, et renfermant une infinité de nombres premiers. On rencontrerait même encore une infinité de pareils nombres, en se restreignant aux valeurs de t d'une forme particulière comme $t = 4k+2$, ce qui donnerait $\Delta = 8k+5$, ou $t = 4k+1$, ce qui donnerait $\Delta = 8k+3$.

Il reste donc à prouver que parmi ces nombres premiers il en est qui permettent de déterminer c et a' par l'équation

$$(5) \qquad bc - a'^2 = \Delta.$$

Pour que cette équation soit possible, il faut et il suffit qu'on ait

$$\left(\frac{-\Delta}{b}\right) = 1;$$

or l'équation

$$b = a\Delta - 2$$

donne

$$\left(\frac{b}{\Delta}\right) = \left(\frac{-2}{\Delta}\right),$$

ces signes ayant le sens que leur donne Jacobi (voir *Journal de Mathématiques*, 1re série, tome XII, page 497).

Or

$$\left(\frac{\Delta}{b}\right) = \left(\frac{b}{\Delta}\right)(-1)^{\frac{b-1}{2}\cdot\frac{\Delta-1}{2}};$$

par suite,

$$\left(\frac{-\Delta}{b}\right) = \left(\frac{\Delta}{b}\right)(-1)^{\frac{b-1}{2}} = \left(\frac{b}{\Delta}\right)(-1)^{\frac{b-1}{2}+\frac{b-1}{2}\cdot\frac{\Delta-1}{2}};$$

d'ailleurs

$$\left(\frac{b}{\Delta}\right) = \left(\frac{-2}{\Delta}\right) = (-1)^{\frac{\Delta-1}{2}+\frac{\Delta^2-1}{8}},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{-\Delta}{b}\right) = (-1)^{\frac{b-1}{2}+\frac{\Delta-1}{2}+\frac{\Delta^2-1}{8}+\frac{b-1}{2}\cdot\frac{\Delta-1}{2}} = (-1)^{E}.$$

Cela posé,

pour $a=4n+1$, $\Delta=8k+5$, on trouve $b=4h+3$, $E\equiv 0 \pmod{2}$,
pour $a=4n+3$, $\Delta=8k+3$, on trouve $b=4h+3$, $E\equiv 0 \pmod{2}$;

ainsi l'équation

$$\left(\frac{-\Delta}{b}\right) = 1$$

est toujours satisfaite, et l'on a

$$(6) \qquad 2n+1 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha''^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

II. Si l'on double l'équation (6), il vient

$$4n+2 = (\alpha+\alpha')^2 + (\alpha-\alpha')^2 + (2\alpha'')^2,$$

ou

$$2p = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

J'ai montré qu'en général, p étant un nombre premier de forme $\mu\varpi+1$, on avait toujours (*Journal de Mathématiques*, 1re série, tome XIX, page 298)

$$2p = (a_0-a_1)^2 + (a_1-a_2)^2 + \ldots + (a_{\mu-1}-a_0)^2,$$

les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-1}$ étant faciles à trouver par le moyen du *Canon Arithmeticus* de Jacobi.

Pour $\mu = 3$,

$$2p = (a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = f^2 + g^2 + h^2.$$

Si aucun des nombres f, g, h n'était divisible par 3, chaque carré ayant la forme $(3n \pm 1)^2 = 3\,\mathrm{N} + 1$, $2p$ serait divisible par 3, ce qui est impossible.

Soit donc $a_0 - a_1$ divisible par 3, il vient

$$4p = 2(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_0)^2 + (a_1 - 2a_2 + a_0)^2,$$

ou

$$4p = (a_1 - 2a_2 + a_0)^2 + 27\left(\frac{a_1 - a_0}{3}\right)^2 = \mathrm{L}^2 + 27\,\mathrm{M}^2,$$

formule de Jacobi.

N. B. Quelques mots qui manquent à la page 298 citée plus haut (1re série du Journal, tome XIX) rendent une démonstration incomplète: il faut lire, ligne 8 en remontant,

« *Comme* $(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_0) = 0$, l'une des trois » différences est divisible par 3, *car autrement on aurait* p *divisible par* 3, *ce qui est impossible.*

Sans les mots en caractères italiques, il n'y a plus démonstration.

NOTE

SUR

LA GÉOMÉTRIE ORGANIQUE DE MACLAURIN,

CONTENANT

DIVERSES APPLICATIONS DES THÉORIES DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

I.

Les sections II et III de la *Géométrie organique*, qui forment plus de la moitié de cet ouvrage célèbre, traitent exclusivement des courbes du troisième et du quatrième degré, et font connaître divers moyens de les décrire par les intersections de droites tournant autour de pôles fixes, ou par celles des côtés d'angles mobiles d'après des lois déterminées. Les propositions, qui établissent le degré des courbes engendrées dans chaque cas, sont démontrées par la méthode des coordonnées de Descartes, et c'est d'après la composition des équations algébriques que l'auteur fait rentrer dans la classification newtonienne les courbes du troisième degré que ces équations représentent.

C'est sans doute dans le but de rendre ce rapprochement plus facile, que Maclaurin, qui affectionnait particulièrement les méthodes géométriques, comme Newton et tous les mathématiciens anglais de ce temps, a eu souvent recours à l'analyse dans sa *Géométrie organique*. Peut-être aussi le degré d'avancement où se trouvait alors la géométrie pure ne lui offrait-il pas toutes les ressources désirables pour traiter l'ensemble des questions qu'il avait en vue.

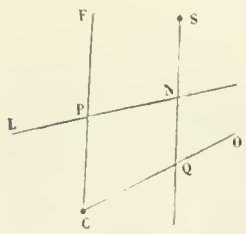
Quoi qu'il en soit, les méthodes modernes permettent de s'affranchir dans la circonstance du secours de l'algèbre. Je me propose, dans la présente Note, de faire l'application de quelques-unes de ces méthodes aux principaux théorèmes démontrés par Maclaurin dans la première

partie de son livre. Je donnerai par là un nouvel exemple des ressources qu'elles présentent, et en même temps j'appellerai l'attention des jeunes géomètres sur un ouvrage qui est l'une des plus belles productions de son illustre auteur.

II.

Les propositions contenues dans la IIe section, qui se rapportent aux courbes à point double du troisième ordre, peuvent, ainsi que Maclaurin en fait la remarque, se résumer en une seule, qui est la suivante :

Si l'on donne sur un plan deux points fixes C, S, *une droite* SN *avec laquelle une autre droite* NL *fait en* N *un angle constant dans un sens de rotation déterminé, enfin un angle constant* FCO *tournant autour de son sommet* C ; *qu'on désigne par* P *le point de rencontre des côtés* CF *et* NL, *et par* Q *le point de rencontre des côtés* CO *et* SN, *on formera un quadrilatère variable* CQNP. *Si deux des trois sommets mobiles de ce quadrilatère se meuvent sur des droites données, le troisième décrira une courbe du troisième degré qui aura un point double, soit en* C, *soit en* S.



Il y a trois cas à considérer.

III.

Premier cas. — Les deux points P, Q se meuvent sur deux droites données A, A′ ; on demande le degré de la courbe décrite par le point N.

Les points variables P et Q marquent sur A et A′ deux divisions homographiques, parce que l'angle pivotant FCO est constant (*Géométrie supérieure*, n° **145**) ; soient p, p', p'', etc. ; q, q', q'', etc., ces deux divisions. L'angle N étant aussi constant, ses deux côtés NL, NS marquent deux divisions homographiques sur la droite située à l'infini (*Géom. sup.*, n° **652**). Mais celle de ces deux divisions que décrit le côté NS est homographique à la division q, q', q'', etc., puisque le rayon NS passe constamment par le point S. Donc la division

marquée à l'infini par le côté NL, est homographique à la division p, p', p'', etc., que ce même côté marque sur A. D'après cela, la droite NL enveloppe une parabole Σ (*Géom. sup.*, n° 555).

Cela posé, pour connaître le degré du lieu géométrique que décrit le point N, il suffit de déterminer en combien de points il est coupé par une droite quelconque X.

Soit a un point quelconque de cette droite; de ce point, menons à la parabole Σ deux tangentes T, T′ qui rencontrent la droite A aux points p, p'. Soient Cq, Cq' les seconds côtés des angles pCq, $p'Cq'$ égaux à l'angle donné FCO, et q, q' les points où ces côtés coupent la droite A′. Joignons Sq, Sq'; ces deux rayons iront couper la transversale X en deux points b, b', et feront avec les tangentes T, T′ des angles égaux à l'angle donné N. Ces deux points seront, en général, distincts du point a, et l'un ou l'autre ne coïncidera avec a que dans les positions de ce point qui appartiennent au lieu géométrique cherché.

Il est évident, par ce qui précède, que, à chaque position du point a sur X, il correspond à la fois les deux points b, b' sur cette droite, et que réciproquement à chacun de ces deux points indistinctement il ne correspond qu'un seul point a. Donc, en vertu du *principe de correspondance anharmonique*, les segments bb', etc., sont en involution, et ils correspondent anharmoniquement aux points a, etc.; d'où l'on conclut qu'il n'existe sur X que trois positions où le point a coïncide avec l'un des deux points b, b' qui lui correspondent (voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XLI, page 679. *Note de M. Chasles sur la construction des racines de l'équation du troisième degré*). Deux de ces trois positions peuvent d'ailleurs être imaginaires. Donc enfin la courbe cherchée est du troisième degré.

Cette courbe a un point double en S; car les deux tangentes à la parabole Σ, issues du point S, sont deux positions particulières que peut prendre la droite NL, et dans chacune de ces deux positions, l'autre côté SN de l'angle LNS coupe cette droite au point S, c'est-à-dire que le point S appartient deux fois à la courbe. C'est un nœud, un point de rebroussement ou un point conjugué, selon qu'il est extérieur, adhérent ou intérieur à la parabole Σ.

La discussion fait voir (*Géométrie organique*, page 45) qu'on n'ob-

tient par cette construction que des *hyperboles défectives* douées d'une seule asymptote rectiligne avec ou sans diamètre. Ce sont les courbes n°s 34, 41; 35, 42; 36, 43, 44 de la classification de Newton.

La même chose se voit ici; car le point N ne peut aller à l'infini qu'autant que la droite NL y est elle-même tout entière, c'est-à-dire que si elle est la tangente à l'infini de la parabole. Donc si l'on détermine l'axe de cette parabole, la droite Sn qui fera avec cet axe l'angle donné SNL dans le sens de rotation prescrit, sera parallèle à la seule asymptote que la courbe puisse avoir.

IV.

Deuxième cas. — Les points P et N décrivent deux droites données A, A'; on demande quel est le lieu du point Q.

On prouvera comme dans le premier cas que la droite mobile LN enveloppe une parabole Σ qui est tangente à A'; et l'on en conclut, par des raisonnements analogues, que le point Q décrit une courbe du troisième ordre.

Le point S est double; car si l'on fait l'angle SCF' = OCF, et qu'on nomme F' le point où le côté CF' coupe la directrice A, on pourra de ce point mener à la parabole Σ deux tangentes T, T' qui seront deux positions distinctes du côté NL, et auxquelles correspondront deux rayons Sn, Sn'. Or chacun de ces deux rayons coupe CS au point S. Donc le point S est double, tandis que la courbe ne passe qu'une seule fois par le point C. L'*espèce* du point double dépend, comme dans le premier cas, de la position du point F' par rapport à la parabole Σ.

La discussion fait voir (*Géométrie organique*, page 39) qu'on obtient par cette construction les courbes n°s 7, 8, 11, 13, 18, 19; 34, 35, 36, 41; 68, 69 et 70 de la classification newtonienne, c'est-à-dire des hyperboles redondantes, des hyperboles défectives, des courbes hyperbolo-paraboliques ou des paraboles divergentes.

V.

Troisième cas. — Les points N et Q se meuvent sur deux droites données A, A'; on demande le lieu du point P.

Des raisonnements analogues à ceux des deux premiers cas prouvent

que le côté NL enveloppe encore une parabole Σ tangente à A, et que le point P décrit une courbe du troisième degré qui passe deux fois en C.

En effet on peut, du point C, mener à la parabole deux tangentes T, T′ qui sont deux positions particulières du côté mobile NL. Or les deux côtés Cf, Cf' de l'angle FCO, qui leur correspondent, les coupent toutes les deux en C. Donc ce point est double, et son espèce dépend de sa position par rapport à la parabole Σ.

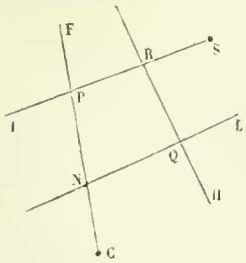
Le côté NL, sur lequel se trouve constamment le point P générateur de la courbe, ne peut évidemment jamais passer par le point S. Donc ce point n'appartient pas à la courbe.

La discussion apprend (*Géométrie organique*, pages 17 et suiv.) que cette troisième construction peut, selon la position des lignes et la grandeur des angles de la figure, donner les courbes n°s 2, 7, 8, 25; 11, 18, 19, 20; 3, 12; 4, 13; 47, 53, 54; 48; 49; 34, 41; 35, 42; 36, 43, 44; 47, 48, 51, 49; 68, 69, 70; 57, 58, 59, 60; 64, 65, 66 de la classification de Newton.

VI.

La section III du livre I de la *Géométrie organique* traite du mode de description de certaines courbes du quatrième ordre qui, dans des cas particuliers, s'abaissent au troisième degré. Les diverses propositions qui s'y trouvent démontrées se résument dans le théorème général qui suit :

Théorème. — *On donne sur un plan deux points fixes* C *et* S, *deux angles constants* CNL, SRH *dont les côtés* CN *et* SR *passent constamment par les points* C *et* S *respectivement. Soient* P *et* Q *les points* (CN, SR) *et* (NL, RH); *si trois quelconques des sommets mobiles du quadrilatère* NQRP *se meuvent sur trois droites fixes, le quatrième décrira une courbe du quatrième degré.*



Il y a, comme dans le § II, trois cas à considérer.

VII.

Premier cas. — Les points R, N, Q se meuvent sur trois droites données A, A′, A″; on demande le lieu du point P.

On prouve, comme plus haut, que le côté mobile RH enveloppe une parabole Σ tangente à A, et que le côté mobile NL en enveloppe une autre Σ′ tangente à A′.

Cela posé, cherchons combien il existe, sur une transversale quelconque X, de points appartenant au lieu cherché. Soit q un point pris arbitrairement sur A″. De ce point, menons à Σ deux tangentes T, T′ qui coupent A en r et r'; les rayons Sr, Sr' couperont X en deux points x et x'. Du point q, menons pareillement à Σ′ deux tangentes t, t' qui coupent A′ en n et n'; les rayons Cn, Cn' iront rencontrer X en deux points y, y'. Il est clair que, si le point q se meut sur A″, les points x, x' marqueront sur X une série de segments en involution, qui correspondront anharmoniquement à la division que les points q marquent sur A″, et de même pour les points variables y, y'. Donc les segments en involution xx', etc., correspondent anharmoniquement aux segments en involution yy', etc., et par conséquent il existe sur X quatre points (réels ou imaginaires par couples) tels, que l'une des extrémités d'un segment de la première série coïncide avec l'une des extrémités du segment correspondant de la seconde série. Or ces points de coïncidence appartiennent au lieu cherché; donc ce lieu est du quatrième degré. *Ce qu'il fallait démontrer.*

Le point C est double; car le rayon SR peut se confondre de deux manières avec la droite SC, savoir avec SC ou avec son prolongement, ce qui donne lieu à deux positions distinctes du rayon correspondant CF. Or, dans les deux cas, CF coupe SC au point C; donc le point C est double. Même raisonnement pour le point S.

Une construction géométrique très-simple indique ensuite *l'espèce* de chacun des deux points doubles (*voir* là-dessus la *Géométrie organique*, pages 47 et 48).

VIII.

S'il arrive que le rayon CP prenne la direction CS en même temps que le rayon SP qui lui correspond prend la direction SC, la droite

indéfinie CS fait partie de la courbe; car il n'y a aucun des points de cette droite qui ne puisse être regardé, dans cette position particulière, comme étant le point d'intersection P des deux rayons générateurs. Donc, abstraction faite de cette droite, la courbe se réduit au troisième ordre; et puisque la droite CS passe déjà une fois par chacun des points C et S, la courbe du troisième ordre ne peut plus y passer qu'une seule.

Voilà donc un moyen bien simple de décrire une courbe du troisième ordre qui n'ait pas de points doubles. La discussion fait voir (*Géométrie organique*, page 49) qu'on obtient, moyennant des données convenablement choisies, les courbes n°s 10, 20, 21, 40, 39, etc., de Newton [*].

IX.

Deuxième cas. — Les points R, N, B se meuvent sur trois droites données A, A′, A″; on demande quelle est la courbe décrite par le point Q.

Comme dans le premier cas, le côté RH enveloppe une parabole Σ, et le côté NL en enveloppe une autre Σ′.

Soit a un point pris arbitrairement sur une transversale quelconque X. De ce point, on mène à Σ deux tangentes T, T′ auxquelles correspondent deux rayons Sr, Sr' qui coupent A″ en r et r' respectivement. Quand le point a se meut sur X, le segment rr' se déplace sur A″, et il est visible qu'en vertu du *principe de correspondance* déjà cité, les segments rr', etc., sont en involution et correspondent anharmoniquement aux points a, etc.

Pareillement si, du point a, on mène à Σ′ deux tangentes t, t' qui

---

[*] Ainsi Maclaurin parvient à décrire, par des intersections de simples lignes droites, toutes les courbes du troisième ordre. Mais il est nécessaire d'ajouter que ces courbes ne sont soumises à aucune condition imposée *à priori*. Sauf le cas où la courbe doit avoir un point double et passer par six autres points donnés (problème résolu page 84), l'auteur anglais ne donne nullement la solution de la question générale où il s'agit de faire passer la courbe par neuf points. C'est M. Chasles qui a, comme on sait, résolu le premier ce problème, que Newton regardait comme très-difficile, *inter difficiliora numerandum*. Cette remarque s'étend aussi à la construction des courbes du quatrième degré, telle que la donne Maclaurin.

coupent A' en s et s', puis les rayons Cs, Cs' qui rencontrent A'' en ρ et ρ', le segment $\rho\rho'$ fait partie d'une involution anharmonique à la division des points a. Donc les deux séries de segments rr', etc., et $\rho\rho'$, etc., sont anharmoniques, et il en résulte qu'il existe sur A'' quatre positions telles, que l'une des extrémités d'un segment de la première série coïncide avec l'une des extrémités du segment correspondant de la seconde. Or, quand cette coïncidence a lieu, le point a appartient au lieu géométrique cherché, qui a ainsi sur X quatre points, réels ou imaginaires par couples, et pas davantage. Donc ce lieu est une courbe du quatrième degré.

Il est clair que les pôles C et S n'appartiennent pas à la courbe.

X.

Si les directrices données A, A', A'' sont parallèles entre elles, il est facile de voir, par le raisonnement qui précède, que le point situé à l'infini, sur une transversale quelconque X, appartient à la courbe. Donc la courbe se compose alors de la droite située à l'infini et d'une autre branche; c'est-à-dire qu'elle devient, abstraction faite de la droite à l'infini, une courbe du troisième ordre.

XI.

Troisième cas. — Les points R, P, Q se meuvent sur trois droites données A, A', A''; on demande le lieu du point libre N.

On prouve, comme dans les deux cas qui précèdent, que la courbe décrite par le point N est du quatrième ordre. Maclaurin démontre très-élégamment qu'elle a un point triple en C (page 59).

XII.

La section IV de la première partie (pages 61 et suivantes) est consacrée à la démonstration de plusieurs théorèmes concernant la description des courbes d'ordres plus élevés par le moyen de droites et d'angles mobiles donnés. M. Poncelet en a reproduit plusieurs dans son *Traité des propriétés projectives* (section IV), en les démontrant par de belles méthodes qui lui sont propres. Je n'ai donc pas à revenir sur ce sujet, et je passe immédiatement à une question intéressante qui fait l'objet de la section III de la IIe partie de la *Géométrie organique*.

XIII.

Il s'agit de déterminer la nature de la courbe formée par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes à une courbe géométrique donnée U.

Soient S le point fixe; OT une tangente à la courbe U; O le pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur cette tangente. On demande quelle est la courbe Z que décrit le point O.

Soient X une transversale quelconque, et o son point de rencontre avec SO. Si l'on mène ot parallèle à OT, cette droite variable ot enveloppera une parabole Σ, qui aura son foyer en S et son sommet au pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur X. Si le point o appartenait à la courbe cherchée Z, il coïnciderait avec O, et les deux lignes ot, OT se confondraient aussi. Donc, autant il existe de tangentes communes aux deux courbes Σ et U, autant il y a sur X de points appartenant à la courbe Z. Ainsi $2m(m-1)$ est, en général, le degré de cette courbe, si m exprime celui de la courbe donnée U.

Si la courbe U est une conique, la courbe Z est donc du quatrième degré. Mais si cette conique est une parabole, le degré s'abaisse au troisième. En effet, parmi les quatre tangentes communes à deux paraboles, se trouve la droite de l'infini. Donc le point situé à l'infini sur une transversale arbitraire, appartient à la courbe Z qui se compose ainsi de la droite située à l'infini dont on peut faire abstraction, et d'une courbe du troisième ordre.

Ces résultats sont conformes à ceux que Maclaurin trouve par une marche très-différente, pages 100, 101 et 102.

On voit sans difficulté que le point S, d'où partent les perpendiculaires aux tangentes de la courbe donnée U, est un point multiple de la courbe Z, dont l'ordre de la multiplicité est égal à la *classe* de la courbe U, et par conséquent un point double dans le cas d'une conique.

XIV.

Je ne multiplierai pas davantage ces applications des méthodes de la géométrie moderne. Les exemples précédents suffisent, je crois, pour montrer que ces méthodes ont (du moins dans cet ordre de recherches)

autant de généralité, d'uniformité et de précision que l'analyse algébrique elle-même. La *Géométrie organique* fournirait matière à beaucoup d'autres rapprochements de ce genre. Je ne puis qu'y renvoyer le lecteur. Cet ouvrage, qui est l'un des titres de gloire de Maclaurin, est peut-être trop peu connu en France. Mais ce qui l'est sans doute encore moins, c'est la préface du livre. Cette préface, écrite en latin, est fort belle, et peut donner une juste opinion de l'esprit élevé de Maclaurin, que l'on ne connaît guère que comme géomètre. C'est tout à la fois un beau morceau de littérature et une protestation éloquente contre des tendances fâcheuses qui parfois se sont renouvelées depuis l'époque où le géomètre anglais tentait de les combattre.

La traduction qui suit pourra donner une idée de cette pièce :

« Quand on songe que c'est surtout aux progrès de la Géométrie » que l'esprit humain doit d'avoir enfin soulevé les voiles qui, pen- » dant tant de siècles, lui ont caché les lois sublimes de la philosophie » naturelle ; quand on passe en revue les brillantes découvertes dont » cette science a été le principe dans les arts utiles à l'humanité, ce » serait se montrer bien ingrat envers elle que de mépriser les efforts, » quels qu'ils soient, qui tendent à agrandir son domaine, et de ne » pas reconnaître qu'elle mérite en première ligne d'être cultivée par » les hommes qui se vouent à la recherche de la vérité. Ceux mêmes » qui, au premier abord, ne saisiraient pas l'utilité pratique de ce » genre de spéculations, n'oseront pas blâmer les efforts qui ont pour » objet le progrès des mathématiques pures, quand ils se rappelleront » les conséquences aussi belles qu'imprévues que parviennent à en tirer avec le temps les esprits ingénieux qui les mettent en œuvre.

» Mais si la Géométrie mérite d'être cultivée avec ardeur, ce n'est » pas, j'ose le dire, autant en vue des applications plus ou moins im- » portantes qu'on en peut faire, qu'à cause de cette beauté naturelle » dont elle brille, et de ces jouissances intimes et délicates qu'y puise » l'esprit humain et qui ont plus d'un rapport avec celles que font » naître les études littéraires si heureusement nommées par les Anciens » *humaniores litteræ*. En effet, quiconque a médité sur les choses qui » font le charme de la vie, reconnaît sans peine qu'elles ont toutes » pour fondement le sentiment de l'ordre et de la proportion, et que là est la source de toute beauté. Notre intelligence a reçu du souve-

» rain Créateur cette faculté particulière de n'être sensible qu'aux » choses où elle distingue une harmonie naturelle, et d'éprouver une » répugnance instinctive pour toutes celles qui manquent de cette » juste proportion, quel que soit d'ailleurs leur degré d'importance.

» D'où provient, par exemple, le charme de la musique? Est-ce des » sons eux-mêmes? Non sans doute, puisqu'ils ne font éprouver aucun » plaisir quand on les entend isolément. Ce qui captive en eux, ce qui » émeut, c'est leur succession habilement ménagée, c'est l'harmonie » qui résulte du rapport commensurable de leurs vibrations concor- » dantes. Il en est de même en littérature. Ce qui plaît dans tous les » genres d'écrire, c'est, après la vérité, un sage arrangement des idées; » c'est l'ordre lumineux, la méthode nette et facile avec laquelle l'au- » teur a su les grouper et les exprimer. Et la vérité elle-même, dont » cette forme harmonieuse n'est que l'ornement, qu'est-elle si ce n'est » cet ordre resplendissant que l'esprit attentif parvient à découvrir, » soit dans la sphère immuable des idées abstraites, soit dans le do- » maine compliqué des faits contingents?

» Cette force irrésistible du sentiment de la proportion paraît avoir » été si bien appréciée par les anciens philosophes, qu'ils ont fait con- » sister la vertu elle-même dans un accord parfait, dans une juste » proportion des diverses affections de l'âme, et qu'ils n'ont pas craint » d'affirmer que *tout écart de passion a pour principe une violation des* » *lois de la mesure et des rapports;* violation qui conduit à établir » des rapprochements faux entre ce qui est fini et ce qui n'a pas de » bornes; entre les grandes choses et les petites; entre les parfaites et » les imparfaites; enfin entre le bien et le mal.

» Que faut-il de plus pour nous faire comprendre la cause précise » de ces jouissances que font éprouver à l'esprit les théories abstraites » de toutes les sciences et surtout des sciences mathématiques, et pour » faire ressortir tous les titres que la Géométrie présente à nos louanges » et à nos hommages?

» Sans doute il n'est personne aujourd'hui qui ne reconnaisse l'ex- » cellence et la grandeur de la philosophie mathématique. C'est elle » qui nous a initiés au langage sublime que parlent les cieux, et qui » nous a appris à lire dans le livre éclatant que l'univers étale à nos » regards. Soit que, nous attachant à un seul corps céleste, nous cher-

» chions à pénétrer les secrets de son mouvement propre, soit que,
» jetant nos regards sur l'ensemble des mondes, nous nous efforcions
» de découvrir la structure et la disposition du système, c'est cette
» philosophie qui nous sert de guide, qui nous fait scruter l'ordre su-
» prême et l'harmonie de l'univers, et qui nous laisse aussi éblouis de
» la beauté de tant de merveilles, que confondus de la majesté et de la
» puissance de son éternel Auteur.

» Les mathématiques pures, qui revendiquent à bon droit la plus
» large part de cette gloire incontestée, ne semblent pas d'abord, il
» est vrai, devoir procurer d'aussi vives jouissances; et pourtant com-
» bien d'aperçus magnifiques elles ouvrent à l'esprit qui est sensible à
» l'harmonie et à la proportion! Celui qui s'abandonne aux spécula-
» tions abstraites de la Géométrie, soit qu'il cherche à découvrir les
» diverses propriétés d'une ligne ou d'une figure particulière, soit qu'il
» étudie celles d'une famille entière de lignes, ou de tout le groupe
» qui réunit les familles distinctes, soit enfin qu'il s'attache aux carac-
» tères plus généraux qui sont communs à tous ces groupes, celui-là,
» disons-nous, peut suivre dans ses développements et dans son infinie
» variété toute idée préconçue de proportion et par conséquent de
» beauté. Car parmi toutes les lois existantes ou simplement possibles
» d'harmonie et de proportion, il n'en est pas une seule qui ne trouve
» son application dans quelque courbe, et qui n'ait ainsi sa représen-
» tation sensible. C'est à la sagacité du géomètre qu'il appartient de
» découvrir, dans chaque cas, cette courbe spéciale qui concrétise sa
» conception abstraite, et ce travail qui la confirme est en même temps
» merveilleusement propre à accroître les forces et la pénétration de
» l'esprit. Mais cela même nous conduit à des considérations d'un
» ordre plus élevé. En effet, soit que la Géométrie pure nous dévoile
» les mystères du monde réel, soit qu'elle nous permette de prévoir et
» de préciser les phénomènes d'un monde imaginaire qui serait gou-
» verné par des lois différentes de celles que nous connaissons, elle
» nous pénètre sans cesse de la sagesse profonde du grand Architecte
» de l'univers, en nous faisant reconnaître partout, pendant la durée
» limitée de notre vie et dans l'espace borné que nous embrassons,
» des ouvrages dignes de sa providence et de sa toute-puissance.

» C'est ainsi que les théories de la Géométrie pure confinent aux

» questions les plus élevées de notre destinée et de notre nature mo-
» rale, auxquelles on les croirait d'abord si étrangères. Elles y ouvrent
» une voie naturelle et pleine de charme, dans laquelle on ne saurait
» s'engager avec trop de confiance, en suivant la trace de tous les
» grands hommes qui nous en ont donné l'exemple, soit dans l'anti-
» quité, soit dans les temps modernes »

SUR

LA SÉRIE DE LAGRANGE;

PAR M. TCHEBICHEF.

§ I.

L'intégration *par parties* donne la série de Taylor et le terme complémentaire avec une extrême facilité; que manque-t-il à cette méthode pour donner d'une manière analogue la série plus générale due à Lagrange? Toutes les méthodes d'après lesquelles on parvient à la série de Taylor sont plus ou moins susceptibles de donner la série de Lagrange; la méthode d'intégration *par parties* présente seule une exception. En cherchant à combler cette lacune, nous avons reconnu qu'il ne s'agissait que de donner une certaine extension à la méthode de réduction des intégrales, connue sous le nom d'intégration *par parties*, extension qui paraît être utile dans plusieurs autres cas.

L'intégration *par parties* consiste dans cette réduction de l'intégrale $\int \theta(x)\psi(x)dx$,

$$\int \theta(x)\psi(x)dx = \theta(x)\int \psi(x)dx - \int \theta'(x)\left[\int \psi(x)dx\right]dx,$$

ce qu'on peut écrire sans séparer les facteurs du produit $\theta(x)\psi(x)$ de la manière suivante :

$$\int \theta(x)\psi(x)dx = \int \theta(x'')\psi(x')dx' - \int \frac{d\int \theta(x'')\psi(x')dx'}{dx''}dx,$$

en supposant qu'on supprime les accents de x' et x'', après avoir fait les opérations qui se rapportent exclusivement à ces quantités.

Or, en représentant sous cette forme l'intégration *par parties*, on reconnaît sans peine que rien ne s'oppose à ce qu'on l'applique au cas où le produit $\theta(x'')\psi(x')$ est remplacé par une fonction quelconque

de x' et x''. C'est là le changement nécessaire pour qu'on puisse en tirer la série de Lagrange par le même procédé qui conduit à la série de Taylor. L'énoncé de cette réduction des intégrales peut se faire en ces termes :

Si l'on convient de ne distinguer x' et x'' de x que dans les opérations qui se rapportent exclusivement à x' ou x'', on a

$$(1) \qquad \int f(x', x'')\,dx = \int f(x', x'')\,dx' - \int \frac{d\int f(x', x'')\,dx'}{dx''}\,dx.$$

Il n'est pas difficile de remarquer que la réduction des intégrales dont nous venons de parler ne diffère que par son énoncé de celle que M. Bertrand a donnée dans le tome VIII du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville.

Pour montrer la manière de se servir de cette réduction, supposons qu'il s'agisse de réduire l'intégrale $\int (\cos x + e^x)\,dx$. On commencera par mettre l'expression $\cos x + e^x$ sous la forme d'une fonction de x' et x'', ce qu'on peut faire évidemment de différentes manières. Si l'on s'arrête au cas où l'on donne un accent à x sous le signe de *cosinus* et deux à l'exposant de e, l'expression

$$\cos x + e^x$$

devient

$$\cos x' + e^{x''},$$

et alors, d'après la formule (1), on aura

$$\int (\cos x' + e^{x''})\,dx = \int (\cos x' + e^{x''})\,dx' - \int \frac{d\int(\cos x' + e^{x''})\,dx'}{dx''}\,dx$$

$$= \sin x' + x' e^{x''} - \int x' e^{x''}\,dx,$$

ou, en supprimant les accents,

$$\int (\cos x + e^x)\,dx = \sin x + x e^x - \int x e^x\,dx.$$

En intégrant par rapport à x', nous avons pris pour constante zéro, mais rien n'empêche de prendre une valeur quelconque qui peut être

même une fonction de x''. Pour s'en assurer on n'a qu'à remarquer que la formule (1), étant différentiée par rapport à x, se réduit à cette identité

$$f(x', x'') = f(x', x'') + \frac{d\int f(x', x'')\,dx'}{dx''} - \frac{d\int f(x', x'')\,dx'}{dx''}.$$

§ II.

Passons maintenant à la démonstration de la série de Lagrange. Nous supposerons qu'on ait

$$X - a = f.\varphi(X),$$

et que l'on cherche le développement de $F(X)$ suivant les puissances croissantes de f.

Imitant la marche ordinaire qui mène à la série de Taylor, mettons la valeur $F(X)$ sous la forme

$$F(X) = F(a) + \int_a^X F'(x)\,dx.$$

Puis remplaçant dans la dérivée $F'(x)$ la lettre x par x'', nous trouvons, d'après la formule (1),

$$\int F'(x)\,dx$$

ou

$$\int F'(x'')\,dx = \int F'(x'')\,dx' - \int \frac{d\int F'(x'')\,dx'}{dx''}\,dx$$

$$= F'(x'')(x' + C) - \int \frac{dF'(x'')(x' + C)}{dx''}\,dx,$$

ce qui donne

$$\int F'(x)\,dx = F'(x'')[x' - a - f\varphi(x'')]$$

$$- \int \frac{dF'(x'')[x' - a - f\varphi(x'')]}{dx''}\,dx,$$

en prenant

$$C = a - f\varphi(x'').$$

Remarquons en passant que cette valeur de C présente une grande analogie avec celle que l'on emploie dans le même cas, en cherchant la série de Taylor.

Si l'on applique de nouveau la formule (1) à l'intégrale

$$\int \frac{dF'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]}{dx''}dx,$$

on parvient à cette réduction

$$\int \frac{dF'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]}{dx''}dx = \int \frac{dF'(x'')(x'-a-f\varphi(x''))]}{dx''}dx'$$

$$-\int \frac{d\int \frac{dF'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]}{dx''}dx'}{dx''}dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{dF'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]^2}{dx''}-\frac{1}{2}\int \frac{d^2F'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]^2}{dx''}dx.$$

Il ne reste qu'à poursuivre la même marche, et l'on obtient successivement

$$\int \frac{d^2F'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]^2}{d(x'')^2}dx = \frac{1}{3}\frac{d^2F'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]^3}{d(x'')^2}$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{d^3F'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]^3}{d(x'')^3}dx,$$

$$\int \frac{d^3F'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]^3}{d(x'')^3}dx = \frac{1}{4}\frac{d^3F'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]^4}{d(x'')^4}$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d^4F'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]^4}{d(x'')^4}dx;$$

et ainsi de suite.

La substitution de ces valeurs donne pour l'intégrale indéfinie

$$\int F'(x)dx$$

cette expression

$$\int F'(x)\,dx = F'(x'')\left[x' - a - f\varphi(x'')\right] - \frac{1}{2}\frac{dF'(x'')\left[x' - a - f\varphi(x'')\right]^2}{dx''}$$

$$+ \frac{1}{2.3}\frac{d^2F'(x'')\left[x' - a - f\varphi(x'')\right]^3}{d(x'')^2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}F'(x'')\left[x' - a - f\varphi(x'')\right]^n}{d(x'')^{n-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\int \frac{d^nF'(x'')\left[x' - a - f\varphi(x'')\right]^n}{d(x'')^n}\,dx.$$

En passant à l'intégrale définie

$$\int_a^X F'(x)\,dx,$$

on reconnaît d'abord que pour

$$x = x' = x'' = a$$

les termes hors du signe d'intégration deviennent

$$-f\,F'(a)\,\varphi(a) - \frac{f^2}{2}\frac{dF'(a)\,\varphi^2(a)}{da} - \frac{f^3}{2.3}\frac{d^2F'(a)\,\varphi^3(a)}{da^2} - \ldots$$

$$- \frac{f^n}{2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}F'(a)\,\varphi^n(a)}{da^{n-1}}.$$

Ensuite que, pour

$$x = x' = x'' = X,$$

X étant racine de l'équation

$$X - a = f\varphi(X),$$

ces termes se réduisent tous à zéro à cause du facteur $x' - a - f\varphi(x'')$ qui y reste malgré toutes les différentiations, et qui s'annule, en vertu de l'équation précédente, pour $x' = x'' = X$.

Donc

$$\int_a^X F'(x)\,dx = f\,F'(a)\,\varphi(a) + \frac{f^2}{2}\frac{dF'(a)\,\varphi^2(a)}{da}$$

$$+ \frac{f^3}{2.3}\frac{d^2F'(a)\,\varphi^3(a)}{da^2} + \ldots + \frac{f^n}{2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}F'(a)\,\varphi^n(a)}{da^{n-1}}$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\int_a^X \frac{d^nF'(x'')\left[x' - a - f\varphi(x'')\right]^n}{d(x'')^n}\,dx,$$

et par conséquent

$$F(X) = F(a) + \int_a^X F'(x)dx = F(a) + f F'(a)\varphi(a)$$

$$+ \frac{f^2}{2}\frac{dF'(a)\varphi^2(a)}{da} + \frac{f^3}{2.3}\frac{d^2F'(a)\varphi^3(a)}{da^2} + \ldots$$

$$+ \frac{f^n}{2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}F'(a)\varphi^n(a)}{da^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\int_a^X \frac{d^nF'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^n}dx.$$

Ainsi l'on parvient à la série de Lagrange

$$F(X) = F(a) + f F'(a)\varphi(a) + \frac{f^2}{2}\frac{dF'(a)\varphi^2(a)}{da} + \frac{f^3}{2.3}\frac{d^2F'(a)\varphi^3(a)}{da^2} + \ldots$$

$$+ \frac{f^n}{2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}F'(a)\varphi^n(a)}{da^{n-1}},$$

et l'on voit que le terme complémentaire a pour valeur

$$\frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\int_a^X \frac{d^nF'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^n}dx,$$

où, après avoir fait les différentiations par rapport à x'', on supprimera les accents de x' et x''. Cette valeur peut être évidemment présentée sous cette forme

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\int_a^X \frac{d^nF'(x+i)[f\varphi(x+i)+a-x]^n}{d^ni}dx,$$

en faisant $i = 0$ après les différentiations.

D'après ce que nous venons de voir, la formule

$$F(X) = F(a) + f F'(a)\varphi(a) + \frac{f^2}{2.3}\frac{dF'(a)\varphi^2(a)}{da} + \ldots$$

$$+ \frac{f^n}{2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}F'(a)\varphi''(a)}{da^n} + \frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\int_a^X \frac{d^nF'(x'')[x'-a-f\varphi(x'')^n]}{d(x'')^n}dx$$

subsiste également pour toutes les valeurs de X qui vérifient l'équation

$$X - a = f\varphi(X).$$

Mais les premiers termes

$$F(a) + F'(a)\varphi(a) + \frac{f^2}{2}\frac{dF'(a)\varphi^2(a)}{da} + \ldots + \frac{f^n}{2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}F'(a)\varphi''(a)}{da^{n-1}}$$

de cette expression qui constituent le développement de F(X), d'après la série de Lagrange, jusqu'à la $(n+1)^{ième}$ puissance de f ne donnent effectivement sa valeur exacte aux quantités de même ordre que si le terme complémentaire

$$\frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\int_a^X \frac{d^n F'(x'')[x' - a - f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^n}dx$$

$$= \frac{1}{2.3\ldots n}\int_a^X \frac{d^n F'(x+i)[f\varphi(x+i) + a - x]^n}{di^n}dx$$

devient, pour f petit, de l'ordre f^{n+1} ou d'un ordre supérieur. Or il est facile de remarquer que cela a lieu nécessairement tant que X est celle des racines de l'équation

$$X = 0 = f\varphi(X),$$

qui se réduit à a pour $f = 0$; car, dans ce cas, en vertu de l'équation

$$X - a = f.\varphi(X),$$

le différence $X - a$ est une quantité de l'ordre f, $\varphi(X)$ étant, par la supposition, finie pour $X = a$, et par conséquent l'intégrale

$$\int_a^X \frac{d^n F'(x+i)[f\varphi(x+i) + a - x]^n}{di^n}dx,$$

où $x - a$ reste compris entre 0 et $X - a$, a tout au plus une valeur de l'ordre f^{n+1}.

§ III.

Le terme complémentaire que l'on vient de trouver permet d'assigner la limite du reste dans les développements construits d'après la formule de Lagrange et arrêtés à un terme de rang quelconque.

Nous allons en donner des exemples sur les développements bien connus de l'*anomalie excentrique* et du *rayon vecteur*, selon les puissances croissantes de l'*excentricité*.

Pour le développement de l'*anomalie excentrique*, il faut poser dans nos formules

$$F(x) = x, \qquad \varphi(x) = \sin x,$$

en supposant que a désigne l'*anomalie excentrique*, x l'*anomalie moyenne* et f l'*excentricité*. Dans ce cas l'équation

$$X - a = f\varphi(X)$$

devient

$$X - a = f \sin X,$$

et le terme complémentaire du développement de $F(X) = X$, prolongé jusqu'à f^n, s'exprime ainsi :

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\int_a^X \frac{d^n[f\sin(x+i)+a-x]^n}{di^n}\,dx,$$

en prenant $i = 0$.

Or, comme l'expression

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\,\frac{d^n[f\sin(x+i)+a-x]^n}{di^n}$$

pour $i = 0$ n'est que la valeur de l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{f\sin(x+re^{p\sqrt{-1}})+a-x}{r}\right]^n e^{-np\sqrt{-1}}\,dp,$$

r étant une quantité quelconque, ce terme complémentaire peut être mis sous cette forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^X\int_0^{2\pi}\left[\frac{f\sin(x+re^{p\sqrt{-1}})+a-x}{r}\right]^n e^{-np\sqrt{-1}}\,dp\,dx.$$

Pour assigner la limite que cette expression ne peut surpasser, nous allons chercher la plus grande valeur que peut avoir le module de

$$[f\sin(x+re^{p\sqrt{-1}})+a-x]^2$$

pour x compris entre a et X, racine de l'équation

$$X - a = f \sin X,$$

ou, ce qui revient au même, pour a compris entre x et $x - f \sin x$.

En dénotant par R le module de cette expression, on trouve

$$R = [f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x][f \sin(x + re^{-p\sqrt{-1}}) + a - x];$$

d'où, en cherchant la valeur de $\frac{d^2 R}{da^2}$, on a

$$\frac{d^2 R}{da^2} = 2.$$

La valeur de $\frac{d^2 R}{da^2}$ étant positive, on conclut que le *maximum* de R ne peut avoir lieu que pour les valeurs limites de a, savoir

$$a = x,$$
$$a = x - f \sin x.$$

Or, pour $a = x$, la valeur de R devient

$$f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) . f \sin(x + re^{-p\sqrt{-1}}),$$

ce qui se réduit à

$$\frac{f^2}{2}[\cos(2r \sin p\sqrt{-1}) - \cos(2x + 2r \cos p)]$$
$$= \frac{f^2}{2}\left[\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos(2x + 2r \cos p)\right],$$

et la plus grande valeur de cette expression a lieu évidemment pour

$$\sin p = 1, \qquad \cos(2x + 2r \cos p) = -1,$$

ce qui donne pour le *maximum* de R cette valeur

$$\frac{f^2}{2}\left(\frac{e^{2r} + e^{-2r}}{2} + 1\right) = f^2\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)^2.$$

En prenant pour a son autre valeur limite $x - f \sin x$, on trouve

que R devient

$$f^2[\sin(x + re^{p\sqrt{-1}})\sin x][\sin(x + re^{-p\sqrt{-1}})\sin x],$$

ce qui se réduit à

$$4f^2\cos\left(x + \frac{r}{2}e^{p\sqrt{-1}}\right)\sin\left(\frac{r}{2}e^{p\sqrt{-1}}\right)\cos\left(x + \frac{r}{2}e^{-p\sqrt{-1}}\right)\sin\left(\frac{r}{2}e^{-p\sqrt{-1}}\right),$$

et comme

$$\begin{aligned}
&2\cos\left(x + \frac{r}{2}e^{p\sqrt{-1}}\right)\cos\left(x + \frac{r}{2}e^{-p\sqrt{-1}}\right)\\
&= \cos(r\sin p\sqrt{-1}) + \cos(2x + r\cos p)\\
&= \frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} + \cos(2x + r\cos p),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{r}{2}e^{p\sqrt{-1}}\right)\sin\left(\frac{r}{2}e^{-p\sqrt{-1}}\right)\\
&= \cos(r\sin p\sqrt{-1}) - \cos(r\cos p)\\
&= \frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} - \cos(r\cos p),
\end{aligned}$$

on trouve pour R cette valeur

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = f^2&\left[\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} - \cos(r\cos p)\right]\\
\times&\left[\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} + \cos(2x + r\cos p)\right].
\end{aligned}$$

On parvient facilement à reconnaître que cette valeur reste toujours au-dessous du *maximum* de R que nous venons de trouver pour $a = x$. En effet, en cherchant les valeurs de p pour lesquelles l'expression

$$\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} - \cos(r\cos p)$$

peut devenir *maximum* ou *minimum*, on trouve l'équation

$$(2)\qquad \frac{e^{r\sin p} - e^{-r\sin p}}{2}\cos p - \sin(r\cos p)\sin p = 0.$$

Cette équation se vérifie évidemment quand on fait

$$\sin p = 0$$

ou

$$\cos p = 0,$$

et hors ces cas, elle ne peut être satisfaite; car tant que $\sin p$ est différent de zéro, on a

$$\left(\frac{e^{r\sin p} - e^{-r\sin p}}{2}\right)^2 > r^2 \sin^2 p,$$

et comme

$$\sin^2(r\cos p) \leqq r^2 \cos^2 p,$$

cela suppose

$$\left(\frac{e^{r\sin p} - e^{-r\sin p}}{2\sin(r\cos p)}\right)^2 > \operatorname{tang}^2 p,$$

tandis que l'équation (2), pour $\cos p$ différent de 0, donne

$$\frac{e^{r\sin p} - e^{-r\sin p}}{2\sin(r\cos p)} = \operatorname{tang}^2 p.$$

Donc les *maxima* et les *minima* de l'expression

$$\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} - \cos(r\cos p)$$

ne peuvent avoir lieu, à moins qu'on n'ait

$$\cos p = 0$$

ou

$$\sin p = 0.$$

D'après cela, en remarquant que l'expression

$$\frac{e^{r\sin p} + e^{-r\sin p}}{2} - \cos(r\cos p)$$

devient

$$\frac{e^r + e^{-r}}{2} - 1 = \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{2.3.4} + \frac{r^6}{2.3.4.5.6} + \ldots,$$

ou

$$1 - \cos(r) = \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2.3.4} + \frac{r^6}{2.3.4.5.6} - \ldots,$$

selon qu'on prend $\cos p = 0$ ou $\sin p = 0$, et que la première valeur surpasse la seconde, nous concluons que c'est cette valeur

$$\frac{e^r + e^{-r}}{2} - 1,$$

qui est le maximum de l'expression

$$\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos(r \cos p).$$

Mais comme l'autre facteur

$$\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} + \cos(2x + r \cos p)$$

de la valeur de R

$$\mathrm{R} = f^2 \left[\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos(r \cos p\right]$$
$$\times \left[\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} + \cos(2x + r \cos p)\right]$$

ne peut être évidemment au-dessus de $\frac{e^r + e^{-r}}{2} + 1$, il s'ensuit que cette valeur de R ne peut surpasser la limite

$$f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} - 1\right)\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} + 1\right) = f^2 \left(\frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)^2,$$

et par conséquent qu'elle est inférieure à $f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)^2$; ce qu'il s'agissait de prouver.

Ainsi l'on parvient à reconnaître que la plus grande valeur que peut avoir le module de l'expression

$$[f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x.]^2$$

pour x compris entre a et X, racine de l'équation

$$X - a = f \sin X,$$

est celle-ci :

$$f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)^2.$$

Il en résulte que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^X \int_0^{2\pi} \left[\frac{f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x}{r}\right]^n e^{-np\sqrt{-1}} dp\,dx,$$

qui désigne le reste de la série en question, est au-dessous de cette valeur

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^X \int_0^{2\pi} \frac{\left[f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}}{r^n} dp\,dx = (X - a) f^n \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r}\right)^n.$$

Cette limite, du reste, sera plus ou moins grande selon la valeur de r. Mais comme r est tout à fait arbitraire, rien n'empêche de le choisir de manière que la limite devienne la plus petite possible, et par conséquent la plus proche de la vraie valeur du reste. On y parvient en prenant pour r une valeur qui rende *minimum* l'expression

$$\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r}\right)^n,$$

ou, ce qui revient au même, *maximum* celle-ci :

$$\frac{2r}{e^r + e^{-r}}.$$

En dénotant par k le *maximum* de cette expression, on aura pour la limite du reste la valeur

$$(X - a)\left(\frac{f}{k}\right)^n,$$

et comme la différence $X - a$, en vertu de l'équation

$$X - a = f \sin X,$$

ne surpasse pas f, on peut prendre pour cette limite l'expression suivante :

$$f\left(\frac{f}{k}\right)^n, \quad \text{ou} \quad k\left(\frac{f}{k}\right)^{n+1}.$$

Quant à la valeur de k, on trouve que le *maximum* de

$$\frac{2r}{e^r + e^{-r}}$$

a lieu pour r, racine de l'équation

$$\frac{d\dfrac{2r}{e^r + e^{-r}}}{dr} = \frac{2}{(e^r + e^{-r})^2}\left[e^r + e^{-r} - r(e^r - e^{-r})\right] = 0,$$

et que la valeur approchée de ce *maximum* est 0,66195.

§ IV.

Pour trouver la limite du reste dans le développement du *rayon vecteur*, on prendra

$$F(x) = 1 - f\cos x, \qquad \varphi(x) = \sin x,$$

en supposant toujours que x désigne l'*anomalie excentrique*, a la *moyenne* et f l'*excentricité*. Ces valeurs de $F(x)$ et $\varphi(x)$, en s'arrêtant dans la série de Lagrange au terme

$$\frac{f^n}{2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}F'(a)\varphi^n(a)}{da^{n-1}},$$

donnent pour le reste

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\int_a^X \frac{d^n\left[f\sin(x+i)\left(f\sin(x+i)+a-x\right)\right]}{di^n}\,dx,$$

où $i = 0$, après les différentiations.

En suivant la même marche que dans le paragraphe précédent, on mettra cette expression sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^X\int_0^{2\pi}\frac{f\sin\left(x+re^{p\sqrt{-1}}\right)\left[f\sin\left(x+re^{p\sqrt{-1}}\right)+a-X\right]^n}{r^n}\,e^{-np\sqrt{-1}}\,dp\,dx.$$

On commencera la recherche de la limite supérieure de ce reste, ainsi transformé, par le calcul de la plus grande valeur que peut avoir le module de

$$f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right)\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^n$$

pour x compris entre a et X, racine de l'équation $X - a = f \sin X$. Or nous venons de trouver dans le paragraphe précédent que pour ces valeurs de x le plus grand module de l'expression

$$\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^2$$

est $f^2\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r}\right)^2$, et que ce module n'a lieu que pour $a = x$ et par conséquent dans le cas où l'expression

$$\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^2$$

se réduit à

$$\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right)\right]^2.$$

Donc la valeur

$$f^2\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r}\right)^2$$

est la limite des modules de chacune de ces deux expressions

$$\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^2, \qquad \left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right)\right]^2;$$

d'où il suit que le module de

$$f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right)\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^n$$

ne peut surpasser

$$f\frac{e^r + e^{-r}}{2}\left(f\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)^n = f^{n+1}\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right)^{n+1},$$

et par conséquent la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^X \int_0^{2\pi} \frac{f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right)\left[f \sin\left(x + re^{p\sqrt{-1}}\right) + a - x\right]^n}{r^n} e^{-np\sqrt{-1}}\, dp\, dx,$$

qui est le reste de la série en question, doit être au-dessous de cette limite

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^X \int_0^{2\pi} \frac{f^{n+1}}{r^n}\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)^{n+1} dp\,dp = (X-a)\frac{f^{n+1}}{r^n}\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)^{n+1}.$$

Cette limite s'approche le plus près de la vraie valeur du reste quand on prend pour r la valeur qui la réduit à son *minimum ;* ce qui a lieu pour r déterminé par l'équation

$$\frac{d\,\frac{1}{r^n}\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)^{n+1}}{dr} = \frac{n+1}{2r^{n+1}}\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)^n\left[(e^r+e^{-r})r - \frac{n}{n+1}(e^r+e^{-r})\right] = 0.$$

Mais on n'augmente pas notablement cette valeur en prenant pour r la racine de l'équation

$$r(e^r - e^{-r}) - e^r - e^{-r} = 0,$$

qu'on trouve en faisant dans l'équation précédente n infiniment grand. Avec cette valeur de r l'expression

$$\frac{2r}{e^r+e^{-r}}$$

se réduit à la quantité que nous avons désignée par k, et alors l'expression trouvée de la limite du reste devient

$$r(X-a)\left(\frac{f}{k}\right)^{n+1}.$$

De plus, comme la différence $X-a$ ne surpasse pas f, on peut remplacer cette limite par celle-ci :

$$rf\left(\frac{f}{k}\right)^{n+1} = kr\left(\frac{f}{k}\right)^{n+2}.$$

Les limites que nous venons de trouver pour le reste du développement de l'*anomalie excentrique* et du *rayon vecteur* seraient notablement diminuées si, au lieu de remplacer, comme nous l'avons fait dans

le § III, les expressions

$$\frac{e^{2r\sin p}+e^{-2r\sin p}}{2}+1,\qquad \frac{e^{r\sin p}+e^{-r\sin p}}{2}+1,$$

$$\frac{e^{r\sin p}+e^{-r\sin p}}{2}-\cos(r\cos p),$$

pour toutes les valeurs de p par leurs *maxima*

$$\frac{e^{2r}+e^{-2r}}{2}+1,\qquad \frac{e^{r}+e^{-r}}{2}+1,\qquad \frac{e^{r}+e^{-r}}{2}-1.$$

on tenait compte de leur diminution quand $\sin p$ s'approche de 0. Mais malgré cette hypothèse défavorable, les limites trouvées suffisent pour montrer clairement que les développements de l'*anomalie excentrique* et du *rayon vecteur*, selon les puissances croissantes de l'*excentricité*, sont toujours convergentes si la valeur de l'excentricité est inférieure à la limite $k=0{,}66195$. C'est ce que Laplace a trouvé le premier, et ce que M. Cauchy a démontré par une méthode très-ingénieuse. Ces limites suffisent aussi pour prouver que *dans ces développements l'erreur est toujours au-dessous du rapport de l'excentricité à* $k=0{,}66195$, *élevé au degré égal au nombre de termes qu'on retient*.

On s'en assurera si l'on remarque que dans les expressions

$$k\left(\frac{f}{k}\right)^{n+1},\qquad kr\left(\frac{f}{k}\right)^{n+2},$$

que nous avons trouvées pour ces limites, les facteurs k et kr sont inférieurs à 1, car la valeur de k est 0,66195, et r racine de l'équation

$$e^{r}+e^{-r}-r(e^{r}-e^{-r})=0$$

est au-dessous de 1,2.

D'autre part, en supposant, comme nous l'avons fait, que dans ces développements on arrête la série de Lagrange au terme

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}F'(a)\,e^{n}(a)}{da^{n-1}},$$

on trouve $n+1$ ou $n+2$ termes, selon qu'il s'agit du développement de l'*anomalie excentrique* ou du *rayon vecteur;* car dans le premier cas on prend $F(x)=x$, et dans le second $F(x)=1-f\cos x$, ce qui donne dans ce cas un terme de plus (*).

(*) M. Tchébichef avait ajouté à cette Note, qu'il nous a remise en décembre dernier, un V^e paragraphe, où il s'occupait d'un système d'équations simultanées : il nous a autorisé à le supprimer ici, à cause de la complication des formules. On le retrouvera dans le travail complet que l'auteur publiera sans doute bientôt.

SUR UN THÉOREME DE M. DIRICHLET;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On trouve dans le Mémoire de M. Dirichlet *sur les applications de l'analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres* un théorème du genre de ceux dont j'ai parlé dans un article inséré au cahier d'*avril*, page 141. Ce théorème n'est pas énoncé explicitement par l'illustre géomètre, mais il résulte d'une de ses formules (*voir* le Journal de Crelle, tome XXI, page 4). Je profite de la place qui reste libre dans cette feuille pour en dire ici deux mots.

Je désigne par $\theta(m)$ le nombre de manières dont l'entier m peut être décomposé en deux facteurs premiers entre eux, et par $\zeta(m)$ le nombre des diviseurs de m. Cela posé, considérons les diviseurs carrés D^2 que m peut avoir (l'unité est toujours un de ces diviseurs), et pour chacun d'eux formons l'expression $\theta\left(\frac{m}{D^2}\right)$, puis faisons la somme des résultats pour tous les diviseurs D^2. Le théorème de M. Dirichlet consiste en ce que

$$\sum \theta\left(\frac{m}{D^2}\right) = \zeta(m).$$

Ainsi, pour le cas de $m = 12$, où $D^2 = 1, 4$, on a

$$\theta(12) + \theta(3) = 4 + 2 = \zeta(12).$$

Si, au lieu de ne considérer que les diviseurs carrés D^2, on prenait tous les diviseurs d de m, on aurait cette autre formule, curieuse aussi,

$$\sum \theta\left(\frac{m}{d}\right) \quad \text{ou} \quad \sum \theta(d) = \zeta(m^2).$$

Exemple : $m = 12$: alors

$$\theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \theta(4) + \theta(6) + \theta(12) = 15 = \zeta(12^2).$$

OBSERVATIONS

SUR

LE MÉMOIRE DE M. HOUSEL,

INTITULÉ

LES PORISMES D'EUCLIDE;

Par M. BRETON (de Champ),

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Il a été publié, dans le précédent volume de ce Journal, un Mémoire ayant pour titre : *les Porismes d'Euclide*. L'auteur de ce Mémoire, M. Housel, qui a bien voulu m'en offrir un exemplaire, y traite de la question générale des Porismes, et énonce sur cette question diverses conclusions qui sont en contradiction avec les miennes. Je me propose d'examiner ici ce travail, de combattre dans l'intérêt de ce que je crois être la vérité, celles des opinions de M. Housel qui me semblent ne pouvoir être admises, comme aussi de reconnaître ce qui peut s'y trouver de juste, et de profiter de l'occasion pour rectifier aussi moi-même mon propre travail dans quelques-unes de ses parties; et si cet examen n'ajoute rien d'essentiel à ce que l'on sait aujourd'hui sur les Porismes, j'aurai peut-être réussi du moins à jeter un plus grand jour sur certains détails qui ne laissent pas d'avoir leur importance.

Avant de commencer cet examen, je dois relever une assertion de M. Housel qui me fait craindre de n'avoir pas été compris par lui. Je veux parler du passage où il dit, en citant mon Mémoire [*] dans des termes d'une extrême bienveillance (page 193) : « L'auteur semble hé-

[*] Il s'agit du Mémoire intitulé : *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide*, qui a été inséré dans ce Journal (1re série, tome XX, pages 209-304). M. Housel n'en avertit pas le lecteur.

» siter à poser des conclusions. » Je me suis au contraire appliqué à être très-affirmatif et à ne laisser sans réponse aucune des nombreuses questions qui naissent de l'interprétation des textes de Pappus et de Proclus, et c'est dans ce dessein de ne rien omettre que j'ai donné à la discussion la forme de commentaire. On peut voir, par le § XVII de ce commentaire, intitulé *Résumé et conclusions*, que, loin d'*hésiter à poser des conclusions*, j'en pose de *très-nettes*. Peut-être cette assertion est-elle de la part de M. Housel une manière polie de dire que je me suis trompé, ce qui en effet serait certain si c'était bien lui, et non moi, qui fût dans le vrai.

Je supposerai, dans tout ce qui va suivre, que le lecteur a sous les yeux les textes de Pappus et de Proclus où il est fait mention des Porismes, ce qui est aujourd'hui facile, puisque j'ai donné non-seulement une traduction des textes dont il s'agit, mais encore *ces textes mêmes*, à l'exception seulement des trente-huit lemmes de Pappus qui se rapportent moins directement à la question générale, et pour lesquels une traduction m'a paru devoir suffire. J'ai dû faire cette observation, parce que M. Housel, bien certainement sans en avoir l'intention, semble vouloir dire (page 193) que je me suis borné à citer le texte de Pappus dans les endroits obscurs.

§ I. — *Système de M. Housel.*

Une conjecture que j'avais exprimée en ces termes (commentaire, § XIV) : « Tout porte à croire que les énoncés ou les *hypothèses* des » questions traitées par Euclide roulaient exclusivement sur des figures » variables de forme suivant certaines conditions, » s'est présentée aussi à M. Housel et a fait naître en lui la pensée (page 197) « que » l'ouvrage d'Euclide roulait sur des questions assez cultivées aujour- » d'hui, mais moins répandues chez les anciens, où l'on considère cer- » taines parties des figures mobiles sur certaines autres parties fixes. » Selon lui, le Traité des Porismes pourrait s'intituler en français (page 198) *Traité des figures en mouvement*. Il essaye (*ibidem*) de justifier cette opinion en faisant remarquer qu'elle s'accorde avec l'étymologie du mot *Porisme*, puisque la racine πόρος, signifiant *passage*, entraîne l'idée de mobilité.

Cette maniere de concevoir les Porismes est sujette à deux objections qui me semblent sans réplique. En premier lieu, si cette circonstance de mobilité avait été réellement fondamentale, comment Pappus l'aurait-il passée complétement sous silence dans ses explications relatives aux Porismes, et comment se fait-il que rien ne la rappelle dans les deux définitions du Porisme que cet auteur nous a transmises? En second lieu, les deux problèmes cités par Proclus pour donner une idée du Porisme, savoir: *Un cercle étant donné, en trouver le centre*, et *Trouver la plus grande commune mesure entre deux grandeurs commensurables*, n'impliquent en aucune façon l'idée de mouvement, on peut même dire qu'ils l'excluent. Je pourrais faire à M. Housel une troisième objection de ce qu'il ne rend aucunement raison de l'emploi, dans Euclide, du même terme πόρισμα pour désigner les corollaires et les Porismes. Ce fait qu'on ne saurait laisser sans explication, et que j'ai expliqué assez naturellement (commentaire, § VII), semble ne pouvoir l'être dans le système de M. Housel.

On voit, par ce qui vient d'être dit, que ce système est inadmissible.

§ II. — *Forme sous laquelle M. Housel suppose que les propositions étaient présentées dans le Traité des Porismes.*

S'il y a une chose que l'on puisse affirmer avec certitude en ce qui concerne le *Traité des Porismes*, c'est assurément que les propositions dans cet ouvrage avaient par leurs énoncés l'apparence des *problèmes*. En effet, Pappus dit que beaucoup de géomètres, ne faisant attention qu'à la forme de ces énoncés, considéraient les propositions dont il s'agit comme étant des *problèmes*. Proclus les appelle tout simplement des *problèmes*, et cela par deux fois. De plus, pour donner une idée de ce qui constitue le *Porisme*, il cite deux *problèmes* de géométrie élémentaire. Or M. Housel n'admet point cela. Nonobstant ces témoignages si positifs, si explicites de Pappus et de Proclus, il fait à ces propositions (pages 206 et 207) des énoncés qui leur donnent l'apparence de *théorèmes*. Cependant il semble admettre dans ses conclusions (page 209) que les énoncés d'Euclide avaient l'apparence de *problèmes*, mais en cela il se réfère à la forme d'énoncé proposée par Simson, forme qu'il déclare adopter avec M. Chasles (page 199).

J'ignore jusqu'à quel point on peut se faire illusion à cet égard. Ce

qu'il y a de particulier dans les énoncés où Simson a cru trouver le mot de l'énigme des Porismes, c'est que l'on y affirme la *possibilité* de déterminer des points, des lignes, etc., de manière à satisfaire, pour tous les états d'une figure variable, à certaines conditions indiquées dans chaque énoncé. Or je ne puis voir là qu'*une vérité que l'on énonce et qu'il faut rendre évidente par une démonstration*, c'est-à-dire un théorème, suivant la définition de Pappus, qui est aussi celle des modernes. La circonstance que c'est une *possibilité* que l'on affirme n'ôte point à la proposition son caractère de *théorème*. Appelle-t-on un *problème*, par cela seul qu'on y affirme une *possibilité*, cette proposition [*] : *Par trois points* A, B, C *non en ligne droite on peut toujours faire passer une circonférence, mais on n'en peut faire passer qu'une?* Et cette autre proposition des *lieux plans* d'Apollonius, dont l'énoncé nous a été conservé par Eutoce (*Recherches nouvelles*, § I de l'appendice, IIe livre des *lieux plans*, 2e énoncé, note) : *Etant donné dans un plan deux points et le rapport de deux droites inégales, il est possible de décrire dans ce plan un cercle tel, que les droites menées des points donnés à* (un même point de) *la circonférence soient entre elles dans une raison constante, la même que celle qui est donnée;* cette proposition n'est-elle pas également un *théorème* aux termes de la définition de Pappus? On objecte, il est vrai, qu'avec de tels énoncés il y a *quelque chose à trouver, à découvrir*. Mais est-ce que la preuve d'une *possibilité* peut être autre chose qu'une *démonstration?* Que l'on y emploie l'analyse ou la synthèse, il s'agit toujours en définitive de *démontrer une vérité préalablement énoncée*, et l'on se trouve conséquemment dans le cas du *théorème*.

Au surplus, Simson lui-même ne se dissimulait nullement qu'il y avait dans la forme d'énoncé qu'il proposait quelque chose qui ne s'accordait pas avec l'ancienne définition de Porisme, telle qu'elle est présentée par Pappus. Sous prétexte que celle-ci est *trop générale*, il la remplace par une autre définition, mais tellement différente, qu'il est difficile de trouver entre elles quelque rapport. Dans celle de Pappus, le Porisme est une chose qu'on demande de *découvrir*. Dans celle de Simson, c'est une chose que l'on énonce et qu'il faut *démontrer*,

[*] *Géométrie* de Legendre, livre II, proposition VII.

et qui conséquemment *n'est plus à découvrir*. Afin de sauver la difficulté, Simson ajoute à sa définition que le Porisme prend la forme d'un *problème* si l'on demande de trouver les mêmes choses dont on a à démontrer l'existence quand le Porisme est présenté sous la forme d'un *théorème*. Rien ne semble en effet plus simple et plus facile, au premier abord, que d'opérer cette transformation du *Porisme-théorème* en *Porisme-problème*. C'est une de ces choses qui ont un air d'évidence tel, que l'on n'est point tenté de s'y arrêter. Mais que l'on ne s'y trompe pas : il y a là une très-grosse difficulté. On peut bien affirmer la possibilité de déterminer des points, des lignes, etc., qui satisfassent à certaines conditions *pour tous les états d'une figure variable*, mais demander *à priori* de déterminer ces points, ces lignes, etc., ce qui est le cas du *Porisme-problème* de Simson, ce serait supposer précisément la *possibilité* des relations indiquées dans la première forme d'énoncé, et il est évident que cette *possibilité* devrait être *préalablement* démontrée; si elle l'était, on n'aurait plus à résoudre qu'un *problème ordinaire*, en donnant au mot *problème* la signification adoptée par Simson lui-même.

Ainsi donc cette prétendue possibilité de passer d'une forme d'énoncé à l'autre n'existe pas. Lorsqu'on examine la chose de près, il se trouve qu'en réalité une seule de ces formes est possible, savoir *celle où l'on énonce une vérité qu'il faut rendre évidente par une démonstration*. On voit par là comment Simson, dans l'ordre d'idées où il s'était placé, n'a pu faire autrement que de proposer cette forme même, malgré les témoignages contraires de Pappus et de Proclus. Par là il mettait complétement de côté l'ancienne définition du Porisme.

D'après les termes de cette ancienne définition (qui est parfaitement suffisante pour donner une idée du Porisme lorsqu'on la rapproche, comme le fait Pappus, des définitions du *théorème* et du *problème*), on ne peut reconstituer les Porismes d'une manière vraiment plausible qu'en présentant des questions dans lesquelles on demande réellement de découvrir une chose *qui n'est pas actuellement connue*. C'est la seule manière de satisfaire à cette définition qui se traduit mot à mot : *Porisme est ce qui est proposé pour la découverte de cela même qui est proposé*. Or il est extrêmement facile de trouver une foule de questions qui satisfassent à ces conditions. Pour fixer les idées, je citerai l'exemple

que voici : *Étant donné un cercle et deux tangentes parallèles entre elles, trouver la relation qui existe entre les segments interceptés sur celles-ci entre le diamètre de contact et une troisième tangente.* Il est évident que ces deux segments ont entre eux une relation, puisque l'un ne peut varier sans que l'autre varie aussi. On peut donc proposer de découvrir cette relation, et cela sans avoir besoin de démontrer auparavant qu'elle est possible, comme il arrive pour les prétendus Porismes de Simson, lorsqu'on essaye de les mettre sous forme de problèmes, et la chose à découvrir n'est pas énoncée *comme une vérité à démontrer*. La réponse à cette question est *que la troisième tangente détermine sur les deux premières des segments dont le produit est constant*, et il se trouve que cette réponse est le dernier des Porismes cités par Pappus d'après le premier livre de l'ouvrage d'Euclide. Il est vrai que M. Housel donne à ces exemples une autre dénomination, mais je demande la permission de leur conserver celle de Porisme ; car puisque, d'une part, d'après la définition, le Porisme est une chose qu'il faut découvrir, et que, d'autre part, Pappus présente ces exemples comme les *choses cherchées* dans l'ouvrage d'Euclide, ces exemples sont nécessairement les *Porismes*.

Pour peu que le lecteur ait remarqué les particularités qui, au dire de Pappus, étaient devenues un objet de discussion pour les géomètres, il ne pourra manquer d'être frappé de cette circonstance, que la forme dans laquelle la question ci-dessus est présentée explique complétement toutes ces particularités. La proposition a toute l'apparence d'un *problème*, et cependant la solution n'est pas une *construction ;* elle échappe donc à l'ancienne définition du *problème*. Cette solution, jointe à la question, constitue un véritable *théorème*. Et c'est bien là ce caractère ambigu des propositions du Traité des Porismes qui a si longtemps exercé la sagacité des commentateurs.

§ III. — *Des trois choses que M. Housel voit dans l'énoncé d'un Porisme.*

M. Housel croit (pages 196 et 197) que l'énoncé du Porisme tel qu'il le conçoit comprend essentiellement trois choses, savoir, *l'hypothèse*, *l'accident* et *le résultat*. Dans sa pensée, *l'hypothèse* et *l'accident* formaient deux subdivisions distinctes de ce que l'on appelle ordinairement *l'hypothèse*. La première de ces subdivisions, à laquelle M. Housel

réserve la dénomination *d'hypothèse*, contiendrait les parties *fixes* de la figure, et la seconde, *l'accident*, contiendrait *les conditions de variabilité ou de mobilité*. Enfin le *résultat* serait la chose que l'on cherche.

J'ai fait observer ci-dessus que cette chose que l'on *cherche* ou qu'il faut *découvrir* (et non pas seulement *démontrer*) *est le Porisme même*, et que nécessairement *cette chose n'était pas donnée par l'énoncé de la question*. Il ne me reste donc plus à m'occuper que des deux parties dans lesquelles M. Housel admet que *l'hypothèse* se décomposait. On remarquera que les conclusions que j'ai émises en ce qui concerne d'une part *le mouvement considéré comme constituant l'essence du Porisme*, et d'autre part *la forme sous laquelle M. Housel suppose que les propositions étaient présentées dans le Traité des Porismes*, ne m'autorisent point à rejeter *à priori* ce qui est relatif à cette *division de l'hypothèse en deux parties*, car elle pourrait subsister bien que le *Porisme* ou *résultat* soit nécessairement séparé de l'énoncé, et que la circonstance que *les questions traitées par Euclide roulaient exclusivement sur des figures variables de forme suivant certaines conditions*, n'ait pas la portée que M. Housel lui attribue. Il faut donc examiner en elle-même cette prétendue subdivision de *l'hypothèse*.

M. Housel s'appuie de l'autorité de Pappus. « Pappus, dit-il » (pages 196 et 197), fait observer que l'hypothèse elle-même se sub- » divise en deux parties, dont la première est l'hypothèse proprement » dite, et dont la seconde peut prendre le nom d'*accident* (τὸ συμβε- » βηκός), » et un peu plus loin : « D'après Pappus, la même subdivi- » sion s'applique à tous les Porismes, même à ceux qu'il n'énonce que » d'une manière très-incomplete. » On croirait par ces citations qui sont, comme on le voit, très-affirmatives, que M. Housel a en effet pour lui quelque passage explicite de Pappus et qu'il va le citer. Mais il n'en fait rien. Il indique seulement, comme justifiant sa manière de voir, le passage que voici (page 203) : « Il ne faut pas distinguer les porismes » d'après les différences des *hypothèses*, mais d'après celles des *acci-* » *dents* et des *résultats*. Toutes les hypothèses diffèrent les unes des » autres, étant très-particulières, mais chacun des accidents ou des ré- » sultats se présente absolument le même dans plusieurs hypothèses » différentes. » Cette traduction est d'ailleurs la reproduction de la mienne, sauf les dénominations d'*accident* et de *résultat* introduites

par M. Housel. Or, en la prenant même telle qu'il la présente, je n'y aperçois rien d'où l'on puisse inférer que Pappus n'a pas voulu parler de *l'hypothèse complète*, telle qu'on l'entend ordinairement, et qu'il ait eu l'intention de la restreindre aux *parties fixes* de la figure. Et comme il n'existe dans la *Notice sur les Porismes* (dont j'ai donné le texte complet, outre la traduction en français) aucun autre passage où il soit question à la fois des trois choses que M. Housel voit dans un Porisme, savoir *l'hypothèse*, *l'accident* et *le résultat*, je dois conclure de là que Pappus, en parlant de *l'hypothèse*, attribue à ce terme sa signification ordinaire.

Il est d'ailleurs si peu vraisemblable que Pappus ait scindé *l'hypothèse*, que M. Housel lui-même dit, au sujet des *subdivisions* qu'il conçoit dans le Porisme (page 197), « Elles paraissent un peu subtiles, » ce qui est particulier au génie grec. »

Cette division de l'hypothèse en deux parties, que M. Housel a imaginée et qu'il a cru voir dans Pappus, est donc de tout point inadmissible.

Pour terminer ce que j'ai à dire à ce sujet, je rappellerai que j'ai donné (commentaire, § XIV) l'explication des deux termes συμβεβηκός et ζητούμενον, que M. Housel rend par *accident* et *résultat*. Ils servent l'un et l'autre à désigner des choses que l'on découvre, mais correspondant à deux modes distincts d'invention ou de manifestation du Porisme. Lorsqu'on demande, comme dans l'exemple cité plus haut, de trouver le relation qui existe entre deux segments linéaires tels, que l'un étant déterminé, l'autre l'est aussi, il est évident qu'une relation existe en effet entre ces segments, et le but à atteindre est marqué d'une manière précise par l'état même de la question. Mais lorsqu'il s'agit de découvrir qu'il existe, par exemple, des *points isolés* jouissant de propriétés remarquables comme ceux qui font l'objet de quelques Porismes, la question n'est pas de nature à être présentée de manière que le but à atteindre soit indiqué aussi explicitement. Si une droite est variable de position dans des conditions déterminées, et qu'il se trouve *qu'elle passe par un point fixe* ou bien *qu'elle est vue d'un point fixe sous un angle constant*, ces dernières circonstances sont beaucoup plus cachées qu'une relation segmentaire que l'on sait exister, et leur découverte exige beaucoup plus de perspicacité. Elle suppose chez le

géomètre l'*intuition*, faculté spéciale de l'esprit que les méthodes générales ne donnent point, et c'est sans doute à cette faculté, sans laquelle on n'est pas vraiment géomètre, que Pappus fait allusion en disant que l'ouvrage d'Euclide faisait les délices de ceux qui savent *voir* et *trouver* (ὁρᾶν καὶ πορίζειν). Cette espèce de Porisme, dans laquelle l'intuition est ainsi souvent nécessaire, devait naturellement recevoir une dénomination qui la distinguât des Porismes en général, lesquels sont désignés par le terme ζητούμενον. Cette dénomination particulière est le terme συμβεβηκός, qui veut dire *la chose qui arrive* ou *l'événement*. La circonstance que tel point décrit une droite, un cercle, etc., lorsque cela n'est pas exprimé explicitement dans l'énoncé de la question, ne pourrait guère être mieux désignée que par l'emploi de ce même terme. Il n'y a d'ailleurs dans tout ceci rien qui ne soit très-naturel, et l'on voit combien au contraire le système de M. Housel l'est peu, indépendamment des objections de toute nature qu'il soulève.

§ IV. — *De divers points sur lesquels M. Housel a cru devoir s'écarter de la traduction que j'ai donnée du texte de Pappus.*

Après avoir examiné et soumis à la discussion, comme je viens de le faire, les différentes parties du système conçu par M. Housel sur les Porismes, il me reste à présenter quelques remarques sur certains passages de Pappus qu'il traduit autrement que moi. Ces questions d'interprétation des textes ne sont pas sans importance, lors même qu'il ne s'agit que de détails. Car il est évident qu'on ne pourra savoir la vérité sur cette fameuse énigme des Porismes, qu'en s'attachant à l'interprétation *littérale* des textes qui s'y rapportent.

1°. Τόπος ἀναλυόμενος, *lieu résolu* (page 199). M. Housel, après avoir reproduit la liste [*] des ouvrages qui composaient ce que les

[*] Il est à remarquer que cette liste se termine par les deux livres des *moyennes* d'Eratosthènes, que cependant le nom de ce géomètre n'est pas mentionné parmi ceux des auteurs auxquels on doit les ouvrages formant le *lieu résolu*. « Il se compose, dit » Pappus, d'écrits dus à *trois* géomètres : Euclide l'auteur des éléments, Apollonius de » Perge et Aristée l'ancien. » D'où il semble résulter que la mention de l'ouvrage d'Eratosthènes n'existait pas dans le texte primitif de Pappus. Disant que les auteurs du

géomètres grecs appelaient le *lieu résolu*, en conclut que les *Porismes* qui figurent dans cette liste entre les *contacts* et les *inclinaisons*, servaient à la recherche des *lieux géométriques*. Je ne vois point sur quoi M. Housel fonde une semblable conclusion, à moins qu'il n'ait considéré cette dénomination de τόπος ἀναλυόμενος comme se rapportant essentiellement aux *lieux géométriques*, à cause du terme τόπος qui s'y trouve. Mais ce n'était point là le sentiment de Pappus. « Le *lieu* » *résolu*, dit-il, est une matière à l'usage de ceux qui ayant étudié les » éléments de géométrie, veulent se mettre en état de résoudre les » problèmes qui peuvent leur être proposés. » Il ne restreint donc pas le *lieu résolu* à l'étude des lieux *géométriques*. C'est du reste ainsi que l'ont compris toutes les personnes qui se sont occupées de géométrie ancienne. Τόπος ἀναλυόμενος est *la partie de la géométrie où l'on apprend à résoudre des problèmes*. J'insiste sur cette méprise, en apparence insignifiante, de M. Housel, parce qu'elle en explique une autre que je signalerai plus loin et qui se rapporte directement aux Porismes.

2°. Γενῶν (page 200) est un mot embarrassant que l'on trouve au commencement de la Notice sur les Porismes, dans ce membre de phrase πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν των ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν, ce qui veut dire mot à mot : *recueil rendu très-utile par beaucoup de choses pour l'analyse des problèmes difficiles et des genres*. Ce dernier terme *genres* a l'inconvénient de ne rappeler aucune idée précise, de sorte que l'on ne sait ce que Pappus veut dire. Il est toutefois certain que ἀνάλυσιν doit être pris dans le sens de *résolution* à cause de son premier régime προβλημάτων. Dès lors la proposition que fait M. Housel de traduire γενῶν, le second régime de ἀνάλυσιν, par *théories*, est inadmissible, car on ne sait ce que c'est que la *résolution d'une théorie*.

La difficulté d'interpréter ce passage a été signalée depuis longtemps,

---

lieu résolu ne sont qu'au nombre de *trois*, on ne peut supposer une omission dans leurs noms. Une autre circonstance qui vient à l'appui de cette conjecture, c'est que le nombre total des *livres* que comprend le *lieu résolu* est de *trente et un* suivant les manuscrits, c'est-à-dire le nombre même que l'on obtient en retranchant les *deux* d'Eratosthènes. Si j'ai mis *trente-trois* dans la traduction, c'est afin que l'addition soit juste.

et notamment par Bouilland, dans sa dissertation sur les Porismes. Les manuscrits dans lesquels le texte de Pappus nous a été conservé n'étant pas exempts de défectuosités, j'ai dû examiner s'il ne serait pas possible de remplacer γενῶν par un terme qui en différât assez peu pour qu'une erreur de copiste ne fût pas invraisemblable, et qui présentât en même temps par lui même un sens plausible. Le mot γενομένων que je traduis par *événements*, en me servant d'un *hellénisme* qui existait du temps de Desargues, ou par *conséquences des hypothèses*, pour me conformer au langage actuel, m'a paru se trouver dans ces conditions. Il ne diffère en effet de γενῶν que par les trois lettres ο, μ, ε dont l'omission par un copiste n'aura rien de surprenant pour quiconque a eu l'occasion de voir les singulières bévues auxquelles on est exposé de la part des copistes, et surtout la tendance qu'ils ont à substituer des mots du langage ordinaire à ceux dont ils ne comprennent pas le sens. L'emploi du mot γενομένων est d'ailleurs parfaitement justifié par le sens général de la Notice entière sur les Porismes, puisque l'objet de l'ouvrage d'Euclide était de mettre les géomètres à même de démêler, de discerner, de constater parmi les conséquences d'une hypothèse donnée, celles qu'il était le plus important de considérer, de leur apprendre, en un mot, à *voir* et à *trouver*. Ce terme est encore presque à lui seul une explication de la dénomination commune πορισμα appliquée par Euclide aux *Porismes* et aux *corollaires*, car les conséquences d'une hypothèse se présentent sous certains rapports à la manière des corollaires en géométrie.

» Ajoutons que γενόμενα est un mot à l'usage de Pappus. On le trouve employé dans le sens que je lui attribue à la fin de sa Notice sur les *données* d'Euclide.

Tels sont les divers motifs qui m'ont déterminé à mettre γενομένων au lieu de γενῶν. Je ne me dissimule pas qu'il est extrêmement grave de toucher à un texte; mais, à défaut d'interprétation plausible, il faut bien avoir recours à la supposition que le texte est altéré, et alors on doit tâcher de présenter une correction qui paraisse plausible. Celle que j'ai proposée réunit à l'avantage de conserver toutes les lettres du mot γενῶν celui d'offrir un sens très-net.

Quoi qu'il en soit de ces diverses conjectures, et à quelque leçon que l'on s'arrête, si jamais ce point de la question est assez complétement

éclairci pour cela, il est bien évident que cette leçon n'aura pas d'influence décisive sur l'interprétation générale de Pappus, parce qu'il s'agit ici du but d'utilité des Porismes et non point de leur nature même.

3°. ἑκάστου μὲν πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων (page 201). J'ai traduit : « Chaque Porisme étant, à la vérité, *présenté plusieurs fois*. » Ce que M. Housel n'admet pas. Suivant lui il faut traduire : « Chaque » Porisme étant, à la vérité, *susceptible de plusieurs démonstrations*. » M. Housel ne faisant pas connaître ici les motifs pour lesquels ma version lui semble inadmissible, je dois penser qu'il se réfère tacitement à ce qu'il dit de la forme sous laquelle les propositions étaient présentées dans le Traité des Porismes. Supposant que les *énoncés* de ces propositions comprenaient *hypothèse*, *accident* et *résultat*, ou, pour parler le langage ordinaire, une *hypothèse* suivie d'une *affirmation*, c'est là sans doute ce qui l'a conduit à croire que ἀποδείξεων veut dire ici *démonstrations*.

Or, la signification de ce mot résulte des particularités indiquées par Pappus lui-même dans la suite de sa Notice. On y lit en effet les passages que voici :

« Toutes les hypothèses diffèrent les unes des autres, étant très-par-
» ticulières, mais chacune des choses qui arrivent ou qui sont cher-
» chées *se présente absolument la même dans plusieurs hypothèses dif-*
» *férentes*.

» ... Dans le second livre, les hypothèses sont autres que dans le
» premier, mais le plus grand nombre des choses cherchées *sont les*
» *mêmes*....

» ... Dans le troisième livre... des choses cherchées, beaucoup sont à
» peu près *semblables à celles indiquées ci-dessus* (τὰ μὲν πολλὰ πα-
» καπλησίως τοῖς ἔμπροσθεν). »

Cette circonstance bien remarquable, que chacune des choses qui *arrivent* et de celles qui sont *cherchées*, *se retrouve absolument la même dans plusieurs hypothèses différentes*, ou que chaque Porisme se présente un certain nombre de fois, est bien évidemment le fait exprimé par ces mots ἑκάστου μὲν πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων.

Il est vrai que M. Housel ne traduit pas ἔχοντος par *ayant*, mais par *susceptible d'avoir*, de sorte que chaque proposition d'Euclide n'aurait

pas eu *effectivement*, mais *aurait pu avoir* plusieurs démonstrations. Il me semble qu'ici M. Housel s'écarte du texte et en dénature le sens. Πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντος signifie quelque chose d'*actuel* et non une *possibilité* seulement. La limitation résultant des mots πλῆθος ὡρισμένον exclut cette idée de simple possibilité, car le nombre de démonstrations dont une proposition est *susceptible* est essentiellement illimité.

4°. ὑπεμφαίνουσαν (page 201). M. Housel fait remarquer que ce mot voudrait dire *esquissée, indiquée à demi*, et non point *extrêmement claire*, comme je l'ai supposé. Cependant il croit que j'ai eu raison de traduire comme s'il y avait ὑπερφαίνουσαν.

Je trouve parfaitement juste la remarque de M. Housel sur la véritable signification du mot ὑπεμφαίνουσαν, mais je ne l'ai pas traduit comme s'il y avait ὑπερφαίνουσαν. Il y a dans le texte μάλιστα ὑπεμφαίνουσαν et non pas ὑπεμφαίνουσαν seulement. Je crois toutefois convenable de réviser à cette occasion la traduction de la phrase entière où ce terme se trouve employé, laquelle est ainsi conçue : « Οὐδὲν » προστεθείκατι τοῖς ὑπ' Εὐκλείδου γραφεῖσι πρώτου, χωρὶς εἰ μή τινες » τῶν προ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτῶν παρατε- » θείκασιν · ἑκάστου μεν πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων, ὡς » ἐδείξομεν, του δὲ Εὐκλείδου μίαν ἑκάστου θέντος τὴν μάλιστα ὑπεμ- » φαίνουσαν. »

Je me suis expliqué ci-dessus en ce qui concerne le sens du terme ἀποδείξεων. Ce qu'il faut actuellement déterminer, c'est celui de γραφάς, mot que j'ai traduit et que M. Housel traduit aussi par *démonstrations*. Remarquons tout d'abord que si l'on admet cette signification pour γραφάς, il faut nécessairement en admettre une autre pour ἀποδείξεων, et que conséquemment M. Housel s'est trompé dans l'interprétation de l'un de ces deux termes. Cela est certain pour le second. Quant au premier, je crois qu'il ne doit pas davantage être traduit par *démonstrations*. J'avais été conduit à conjecturer (commentaire, § Ier) qu'il ne serait pas impossible que γραφή dût être traduit par *figure*, car γραφή est la racine de *graphique*, et le sens littéral de ὑπεμφαίνουσαν convient évidemment à la supposition qu'il s'agit de figures. Mais, tout bien considéré, cette supposition me semble elle-même ne pas pouvoir être admise plus que la première. En effet, il y a dans le texte : του δὲ Εὐκλείδου μίαν ἑκάστου θέντος. Or, dire qu'Euclide a

accompagné *chaque Porisme, soit d'une seule démonstration, soit d'une seule figure*, lorsque chaque Porisme se retrouvait le même un certain nombre de fois, *dans des hypothèses différentes*, c'est supposer que nonobstant la *diversité de ces hypothèses, la démonstration ou la figure ne changeait pas lorsqu'on passait d'une hypothèse à l'autre*, ce qui ne paraît pas possible.

D'un autre côté, γραφή, dans le sens de *figure*, n'est pas à l'usage de Pappus. Il se sert pour cela du mot καταγραφή. D'ailleurs γραφή se rapporte ici à γραφεῖσι qui le précède, et qui indique certainement des *choses écrites*.

D'après toutes ces circonstances, je suis porté à croire que γραφή ne peut être que l'*énoncé* même du *Porisme*, pris, bien entendu, *à la fin* de la proposition et non point *au commencement*, puisque ces propositions avaient l'apparence de *problèmes*. Si elles avaient eu, comme M. Housel le suppose, l'apparence de *théorèmes*, Pappus se fût exprimé autrement et aurait mis δευτέρας προτάσεις au lieu de δευτέρας γραφάς. On voit par là pourquoi il n'a pas dû employer le terme προτάσεις qui s'applique seulement aux énoncés placés *en tête* des propositions [*].

γραφή serait donc, à ce nouveau point de vue, la *formule* ou *l'écriture* de chaque Porisme, c'est-à-dire l'ensemble des termes par lesquels chacune des choses qui *arrivent* et qui sont *cherchées* est exprimée. Et il faudrait entendre par δευτέρας γραφάς de nouvelles *formules* qui auraient été données mal à propos pour quelques Porismes, Euclide

---

[*] On trouve, il est vrai, le terme προτάσεις employé un peu plus loin dans un sens que ma traduction présente comme différent. Il s'agit du passage où Pappus dit : συμβέβηκε δὲ καὶ τοῦτο τοῖς πορίσμασι, τὰς προτάσεις ἔχειν ἐπιτετυκμένας διὰ τὴν σκολιότητα πολλῶν συνήθως συνυπακουομένων.... Ce que j'ai traduit : « Il arrive aux Porismes que les propositions en sont difficiles à suivre, à cause de l'incertitude résultant de plusieurs choses ordinairement sous-entendues.... » Après un nouvel examen de ce passage, j'ai reconnu qu'il est plus exact de traduire : *Il arrive encore aux Porismes ceci, de présenter des énoncés très-peu explicites, où plusieurs choses sont ordinairement sous-entendues, ce qui est une cause d'incertitude, etc.* Car dans le texte l'effet paraît être remplacé par la cause. Peut-être le terme σκολιότητα indique-t-il que les *sous-entendus* avaient quelque chose d'*intentionnel*.

n'en ayant donné pour chacun qu'une seule. On voit que τὴν μάλιστα ὑπεμφαίνουσαν s'interprète maintenant sans difficulté et de la manière la plus naturelle.

On s'expliquera sans peine, dans cette supposition, le terme απειρόκαλοι par lequel Pappus qualifie les auteurs des nouvelles *formules*, si l'on fait attention que ce qu'il fallait considérer dans chaque proposition, ce n'était pas l'*hypothèse*, toujours très-particulière, de la question posée, mais bien *la chose qu'il fallait découvrir*, ou le *Porisme*. Le but de l'ouvrage d'Euclide était d'enseigner aux géomètres les moyens de constater dans toute hypothèse donnée l'existence de certaines relations importantes à connaître, dont Pappus nous a transmis les *formules* dans les dernières parties de la Notice; il était donc essentiel de n'apporter aucun changement à ces *formules* et d'en maintenir scrupuleusement les termes.

Par ces motifs, je traduirais comme il suit la phrase citée : « Il n'a » toutefois été ajouté aucun Porisme à ceux qu'Euclide le premier a » formulés, si ce n'est par certains géomètres qui, avant nous, ont mal » à propos opposé de secondes formules à celles d'un petit nombre de » Porismes, chaque Porisme étant, à la vérité, présenté un certain » nombre de fois, mais Euclide ne donnant de chacun qu'une seule » formule, qui en est l'expression la plus claire. »

5°. εἴδη (page 201). Je n'avais pas rendu ce mot. M. Housel le traduit par *apparences*, tandis qu'il signifie *espèces*. C'est ἰδέας que j'aurais du traduire par *apparence* ou *forme* plutôt que par *nature*.

6°. ... ἀλλὰ συγχρωμένων τοῖς στοιχείοις τούτοις, καὶ δεικνύντων αὐτο μονον τουθ' ὅτι ἐστὶ τὸ ζητούμενον, μὴ πορίζόντων δὲ τοῦτο... (pages 202 et 207). Il s'agit, dans ce passage, des géomètres récents auteurs d'une seconde définition des Porismes, citée et repoussée par Pappus; géomètres « hors d'état de découvrir tous les Porismes, mais, dit M. Hou- » sel dans sa traduction, *capables seulement, à l'aide des éléments de* » *géométrie, de démontrer le résultat sans pouvoir le deviner*. J'ai traduit : « Mais *se prévalant de ce qu'ils voyaient dans l'ouvrage d'Eu-* » *clide, et montrant ce qu'il faut chercher sans pouvoir le trouver.* » On voit qu'il y a une très-grande différence entre ces deux traductions. Ce passage m'avait paru obscur, et j'ai eu soin de le dire dans une des notes dont ma traduction est accompagnée. M Housel présente la

sienne sans explication, ce qui sans doute annonce qu'il croit avoir donné le véritable sens de ce passage. Or il me semble qu'au contraire, il s'en est écarté singulièrement.

Car, en premier lieu, τοῖς στοιχείοις τούτοι: ne veut pas dire *les éléments de géométrie*, en effet τούτοις indique l'objet même dont on parle, c'est-à-dire le Traité des Porismes et non les *éléments de géométrie*. Le terme στοιχεῖα peut s'appliquer à toutes les parties de la géométrie, et notamment à celles qui font l'objet des divers écrits composant le *lieu résolu*. On le trouve par exemple employé par Pappus dans sa Notice sur les *lieux plans*.... Απολλώνιος πρὸ τῶν στοιχείων λέγει.... οἱ μὲν οὖν ἀρχαῖοι τῶν ἐπιπέδων τόπων τούτωι τάξιν ἀποβλέποντες εστοιχείωσαν.... On voit que στοιχεῖα est appliqué dans ces passages à un traité qui n'a rien de commun avec les *éléments de géométrie*, et dès lors on ne peut hésiter : τοῖς στοιχείοις τούτοις se rapporte ici nécessairement au Traité des Porismes.

En second lieu, la version de M. Housel n'est rien moins que littérale, et de plus elle suppose chez les auteurs de la nouvelle définition un degré de perspicacité bien peu vraisemblable. S'ils étaient en effet assez habiles pour démontrer le résultat à l'aide des éléments de géométrie, comment admettre qu'ils ne pouvaient pas suivre les raisonnements d'Euclide?

Après avoir examiné de nouveau le texte qui fait l'objet de cette discussion, je crois qu'on peut l'expliquer très-simplement, et voici de quelle manière. Les auteurs de cette seconde définition se bornaient à ouvrir le Traité des Porismes, montraient (mettaient le doigt sur) ce qui était la chose cherchée (le Porisme) sans se donner la peine de suivre le raisonnement d'Euclide (μὴ πορίζοντων δὲ τοῦτο), et le rapprochant alors de l'énoncé de la question, en concluaient que la définition dont il s'agit était exacte.

Je maintiens donc ma version; seulement, au lieu de mettre *sans pouvoir le trouver* pour μὴ πορίζοντων δὲ τοῦτο, je mettrais *sans le déduire par raisonnement*, ce qui se rapproche davantage du texte. C'est vraisemblablement à l'interprétation que M. Housel donne de ce passage qu'il faut rapporter l'opinion qu'il exprime (page 209) dans ces termes :

« Mais plus tard certains mathématiciens... avaient préféré mettre

» les Porismes sous forme de théorèmes, c'est-à-dire qu'ils donnaient
» d'avance la solution et ne laissaient plus aux élèves que la peine de
» la démontrer.....

» Donc ceux des Porismes qui se rattachaient à des lieux géomé-
» triques étaient énoncés comme des théorèmes locaux, ce qui n'em-
» pêchait pas qu'il n'y eût quelque chose à trouver comme dans un
» problème.... »

Cette hypothèse de géomètres qui, après Euclide, auraient changé la forme des Porismes, est en contradiction avec le témoignage de Pappus. Tous les changements apportés aux Porismes depuis Euclide se réduisent à ce qui est exprimé par ce passage : χωρὶς εἰ μή τινες των πρὸ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτων παρατεθείκασιν, dont la signification a été donnée ci-dessus (4°).

7°. ἀπὸ συμβεβηκότος (page 202). M. Housel traduit : *d'après la condition accidentelle*. Il croit voir dans le terme συμβεβηκότος ce qu'il appelle l'*accident*. J'ai mis dans ma traduction : *d'après une circonstance particulière* (*à certaines propositions*).

Je ne répéterai pas ici ce que j'ai dit de cette prétendue subdivision de l'*hypothèse* en deux parties, dont l'une serait l'*hypothèse* proprement dite, et la seconde l'*accident*. Je ferai seulement observer que, par cette manière de voir de M. Housel, c'est-à-dire en admettant que l'*accident* ou la condition de *mobilité* constituait l'essence du Porisme, on arriverait à des conséquences directement contraires au système qu'il a conçu. En effet, la seconde définition, « le Porisme est ce qu'il » faut ajouter à l'hypothèse pour que celle-ci devienne l'énoncé d'un » théorème local, » montre que le Porisme comprend non-seulement l'*accident*, mais encore le *résultat* (pour parler le langage de M. Housel), car l'*hypothèse* et l'*accident* ne sont que *deux* des *trois* parties dont M. Housel forme la proposition *complète*. Et comme, d'après cette seconde définition, le Porisme *n'est pas dans l'énoncé de la question, puisqu'il faut l'y ajouter*, on serait conduit à admettre que les énoncés se réduisaient à l'*hypothèse*, c'est-à-dire aux parties *fixes* de la figure. Pour que cette définition pût s'accorder avec les idées de M. Housel, il faudrait qu'elle fût modifiée de cette manière : « Le Porisme est » ce qu'il faut ajouter à l'*hypothèse* et au *résultat* pour former avec » ceux-ci l'énoncé d'un théorème local ; » et malgré cette modification,

il se trouverait encore que les énoncés n'étaient pas *complets*, puisqu'ils manquaient d'*accident*, de sorte qu'on n'y trouvait point cette notion de *mobilité* que M. Housel considère comme formant l'essence du Porisme; et l'on ne comprend guère comment cette notion fondamentale aurait pu ne pas être exprimée par les énoncés des propositions.

Sans pousser plus loin ces objections, je pense que ἀπὸ συμβεβηκότος veut dire *d'après une chose qui arrive*. Il arrivait en effet que l'hypothèse et le Porisme (tels que je les comprends) formaient ensemble l'énoncé d'un théorème local. Cette circonstance devait se présenter dans *toutes* les propositions de l'ouvrage d'Euclide. C'est à tort que j'ai mis dans ma traduction qu'elle ne se présentait que dans certaines d'entre elles.

8°. κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων. M. Housel traduit : *en mettant de côté les Porismes* (page 204). Ces quatre mots sont en tête de ce passage où Pappus énumère diverses espèces de *lieux plans, solides, linéaires* et *aux moyennes*. M. Housel suppose qu'il s'agit ici des *lieux* considérés *en mettant de côté les Porismes*. S'il en était réellement ainsi, comment les *lieux à la surface*, cités par M. Housel lui-même (page 200), auraient-ils été oubliés dans cette énumération? Et à quelle fin Pappus la présenterait-il? Évidemment cette énumération ne peut être motivée qu'à la condition de se rattacher au Traité des Porismes et d'apprendre au lecteur quelque chose sur ce Traité.

Ce qu'il faut lire dans Pappus, c'est que les *lieux* appartiennent à ce genre de Porismes auxquels la seconde définition est applicable, et qu'ils abondent dans l'ouvrage même d'Euclide. Il y a dans le texte ἐν τῷ ἀναλυομένῳ, ce qui veut dire mot à mot *dans le résolu*. J'ai traduit : *dans l'analyse*. Le mot à mot qui précede me semble préférable. Dans un grand nombre de propositions, la solution étant réunie à l'énoncé, donne un *lieu* [*]. Pappus ajoute qu'à raison de ce grand nombre

[*] Il faut bien se garder de prendre pour des *lieux géométriques* les *lieux* dont il est question ici. Afin de fixer les idées à ce sujet, je considérerai seulement des lignes tracées sur un plan. Ce que nous nommons *lieu géométrique* d'un point qui satisfait à une condition qui ne le détermine pas complétement, est la ligne droite ou courbe formée par l'ensemble des points qui satisfont à cette condition. C'est ainsi qu'une cir-

des *lieux* comparativement aux autres espèces de propositions, ils étaient réunis en groupes distincts ayant chacun son titre particulier. De plus, ils étaient présentés sous la forme spéciale qui correspond à la définition des géomètres récents, c'est-à-dire que le Porisme *était retranché* de chaque énoncé, et c'est là ce que veulent dire les mots κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων, *les Porismes étant retranchés*.

Ce qui a pu faire croire à M. Housel à la possibilité d'une interprétation aussi peu naturelle que celle qu'il propose, c'est qu'il considère le Traité des Porismes comme ayant eu pour objet l'étude des *lieux*, par cela seul que ce Traité faisait partie de l'ensemble d'écrits appelé le *lieu résolu* (τόπος ἀναλυόμενος). Mais τόπος ἀναλυόμενος n'ayant pas cette signification, ainsi que je l'ai fait remarquer ci-dessus (1°), il faut bien admettre que les explications données par Pappus relativement aux *lieux* se rapportent aux *lieux* du Traité des Porismes.

9°. ... πληθῶν πολλῶν καὶ μεγάλων.... M. Housel traduit (page 203): *d'une foule de belles propositions*. J'ai traduit : *d'une foule de propositions de divers genres*. Pappus assimile en quelque sorte l'ouvrage d'Euclide à une véritable mine de propositions, offrant des filons nombreux et riches, mot à mot *de nombreuses et grandes foules*, mais *il ne dit rien des propositions elles-mêmes*. C'est donc à tort que M. Housel fait dire à Pappus que ces propositions sont *belles*. Il n'est question que de leur grand nombre et de leur diversité.

10°. ὅτι, *que*. M. Housel dit (page 205) au sujet de ces fameux énoncés que Pappus nous a conservés et qui commencent tous par ce mot ὅτι, « ici il y a évidemment quelque chose de sous-entendu : c'est » sans doute le mot λέγω, je dis, comme dans la plupart des propo- » sitions de géométrie. »

Il n'est besoin ici évidemment d'aucun sous-entendu. On se fait parfaitement comprendre en disant : *la chose cherchée, c'est que, etc.*, et

---

conférence de cercle est le *lieu géométrique* d'un point dont la distance à un point fixe est donnée. Or, dans la géométrie grecque, un *lieu* est une *proposition* qui a pour objet un *lieu géométrique* et dans laquelle l'*affirmation porte sur la nature de ce lieu*. Telle est la proposition d'Apollonius rappelée ci-dessus, page 188. Lorsque la nature du *lieu géométrique* est connue et que l'affirmation porte sur une propriété commune à tous ses points, la proposition est un *théorème local*.

το ζητούμενον veut bien en effet dire *la chose cherchée*. En traduisant ainsi, tout le texte s'explique de la manière la plus naturelle, et c'est précisément dans cette partie du texte qu'on aperçoit la vraie nature du Porisme.

En terminant, je ferai remarquer que dans le système de M. Housel, l'*accident*, c'est-à-dire la *partie essentielle du Porisme*, est supprimé par Pappus, ce qui n'est certes pas une des moindres singularités de ce système.

§ V. — *Résumé et conclusions.*

On a pu voir par la discussion qui précède que les idées présentées par M. Housel au sujet des Porismes sont ou dénuées de preuves, ou contradictoires avec les textes. On a vu en même temps que si j'ai dû, par suite d'une de ses observations, apporter un changement dans la traduction que j'ai donnée de ces textes et en proposer moi-même quelques autres dans le cours de la discussion, ces changements ont eu essentiellement pour objet d'interpréter quelques passages de la Notice sur les Porismes d'une manière plus complétement littérale que je n'étais parvenu à le faire d'abord, et pour résultat de jeter un nouveau jour sur certaines parties de ce texte, mais sans m'obliger à modifier en aucune façon mes propres conclusions sur la question générale des Porismes.

Plus on étudie cette Notice de Pappus, plus on y reconnaît l'œuvre d'un géomètre consommé, qui possédait une connaissance approfondie de l'ouvrage d'Euclide, et savait en apprécier la haute utilité non moins que la pensée même qui l'avait inspiré. C'est donc en s'attachant à interpréter littéralement cette Notice que l'on peut espérer de parvenir à la connaissance des Porismes d'une manière qui ne trouve plus de contradicteurs. De là résulte la nécessité d'abandonner tout ce qui, dans les opinions émises à ce sujet par divers géomètres, n'est pas justifié par les textes, et à plus forte raison de rejeter tout ce qui est contraire aux définitions. C'est ainsi que j'ai été conduit à repousser les idées émises par Fermat, puis par Simson et ensuite par divers géomètres parmi lesquels on distingue M. Chasles. C'est en appliquant la même règle aux idées exprimées par M. Housel que j'ai dû pareillement les repousser.

P. S. Les observations qui précèdent étaient entièrement rédigées, et j'en avais remis depuis quelques jours le manuscrit à M. Liouville, lorsqu'il a paru dans le journal *la Science* (n° 10, 1er février 1857) une *Notice sur les Porismes*, par M. Vincent, dans laquelle l'éminent helléniste présente une nouvelle traduction des textes, accompagnée d'un certain nombre de remarques critiques sur celle que j'ai donnée dans le présent Recueil. Après avoir pris lecture de cette Notice, dont l'auteur m'a fait l'honneur de m'adresser un exemplaire, je n'ai point cru devoir différer la publication de ma réponse au Mémoire de M. Housel ni y faire aucun changement, quoique M. Liouville l'eût remise à ma disposition. Je lui demanderai plus tard la permission de répondre à M. Vincent dans ce Journal.

RÉDUCTION
D'UNE INTÉGRALE MULTIPLE;

PAR M. O. SCHLOMILCH.

L'intégrale multiple dont nous ferons voir la réduction est celle ci

$$\int\int\int \ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots,$$

étendue à toutes les valeurs positives et négatives de $x, y, z, \ldots$, qui vérifient l'une ou l'autre des inégalités

$$0 < x^2+y^2+z^2+\ldots < 1,$$
$$\sigma_1 < \alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots < \sigma_2,$$

ou même simultanément les deux inégalités énoncées.

Examinons d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire l'intégrale double

$$S = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi(\varkappa+\lambda u+\mu v)\,du\,dv;$$

en prenant $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$, nous aurons

$$S = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(k^2+r^2)\,\varphi(\varkappa+\lambda r\cos\theta+\mu r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Ici l'on peut faire usage de la formule connue

$$\int_0^{2\pi}\psi(a\cos\theta+b\sin\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\psi(\sqrt{a^2+b^2}.\cos\theta)\,d\theta,$$

et l'on aura

$$S = 2\int_0^{\infty}\int_0^{\pi} f(k^2+r^2)\,\varphi(\varkappa+\sqrt{\lambda^2+\mu^2}.\,r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Par retour aux variables primitives u et v, on parvient alors à la formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi(\varkappa+\lambda u+\mu v)\,du\,dv \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi(\varkappa+\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\,.\,u)\,du\,dv. \end{aligned}\right.$$

Cette transformation est avantageuse parce que la fonction φ, dans le second membre, ne renferme qu'une seule des variables u et v.

Quant à l'intégrale triple

$$T = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,dx\,dy\,dz,$$

on trouve à l'aide de la formule (1), en prenant $k=x$, $u=y$, $v=z$, $\varkappa=\alpha x$, $\lambda=\beta$, $\mu=\gamma$,

$$T = 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi(\alpha x+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\,.\,y)\,dx\,dy\,dz.$$

Ici la formule (1) est de nouveau applicable; elle donne

$$T = 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,.\,x)\,dx\,dy\,dz.$$

On voit sur-le-champ que ce procédé si simple peut servir à la transformation d'une intégrale multiple du même genre, et que le résultat sera

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots \\ &= 2^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\rho x)\,dx\,dy\,dz\ldots, \end{aligned}\right.$$

où l'on a désigné par n le nombre des variables x, y, z,..., et par ρ la quantité

$$(3)\qquad \rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots}.$$

L'intégrale prise par rapport à y, z,..., est facile à réduire à l'aide de la formule connue [*]

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \mathrm{F}(\xi^2+\eta^2+\ldots)\,d\xi\,d\eta\ldots = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^\infty y^{m-1}\,\mathrm{F}(y^2)\,dy,$$

(m le nombre des variables ξ, η,...); c'est de cette manière que l'on parvient à la formule remarquable

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots \\ &\qquad = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty f(x^2+y^2)\,\varphi(\rho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Maintenant remplaçons la fonction $f(t)$ par une autre qui coïncide avec $f(t)$ si $t<1$, et qui se réduise à zéro dans le cas contraire. Alors les intégrations au premier membre s'étendent à toutes les valeurs positives et négatives de x, y, z,..., qui vérifient l'inégalité

$$0 < x^2+y^2+z^2+\ldots < 1;$$

quant aux deux intégrations dans le second membre, elles se rappor-

---

[*] Cette formule découle comme on sait d'un théorème de M. Liouville, savoir

$$\int\int\ldots x^{p-1}y^{q-1}\ldots \mathrm{F}(x+y+\ldots)\,dx\,dy\ldots = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\ldots}{\Gamma(p+q+\ldots)}\int_0^h t^{p+q+\ldots-1}\,\mathrm{F}(t)\,dt,$$

$$h > x+y+\ldots > 0.$$

Nous remarquerons à cette occasion qu'il y a encore une formule plus générale que nous avons démontrée ailleurs; c'est la suivante :

$$\int\int\ldots \frac{x^{p-1}y^{q-1}\ldots \mathrm{F}(x+y+\ldots)}{(1+\alpha x+\beta y+\ldots)^{p+q+\ldots}}\,dx\,dy\ldots = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+\ldots)}\int_0^h \frac{t^{p+q+\ldots-1}\,\mathrm{F}(t)\,dt}{(1+\alpha t)^p(1+\beta t)^q\ldots},$$

$$h > x+y+\ldots > 0.$$

Cette formule offre l'avantage de contenir les constantes arbitraires (α, β,...) que l'on peut varier par différentiation ou par intégration.

tent à toutes les valeurs positives et négatives de x et à toutes les valeurs positives de y qui satisfont à la condition

$$0 < x^2 + y^2 < 1.$$

De là on tire sur-le-champ la formule

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int\int \ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots \\ &\quad = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)\,\varphi(\rho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy, \\ &\qquad \text{Condition :}\quad 0 > x^2+y^2+z^2+\ldots < 1. \end{aligned}\right.$$

Supposons de plus que dans la formule (1), la fonction $\varphi(s)$ soit telle que l'on ait

$$\varphi(s) = 0$$

pour toutes les valeurs de s non comprises dans l'intervalle de $s = \sigma_1$ à $s = \sigma_2$; alors nous aurons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int\int \ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots \\ &\quad = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{\frac{\sigma_1}{\rho}}^{\frac{\sigma_2}{\rho}}\int_0^{\infty} f(x^2+y^2)\,\varphi(\rho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy, \\ &\qquad \text{Condition :}\quad \sigma_1 < \alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots < \sigma_2. \end{aligned}\right.$$

Enfin si l'on veut étendre les intégrations à toutes les valeurs positives et négatives de x, y, z,. ., qui vérifient simultanément les deux conditions énoncées, alors il faut aussi que l'on ait, au second membre,

$$-1 < x < +1,\quad 0 < y < \sqrt{1-x^2},$$

et en même temps

$$\frac{\sigma_1}{\rho} < x < \frac{\sigma_2}{\rho},\quad 0 < y < \infty.$$

De là on tire aisément une formule que l'on peut présenter de la manière suivante :

$$(7)\left\{\begin{aligned}&\int\int\int\ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots\\&=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)\,\varphi(\rho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy,\\&\text{Conditions :}\quad 0<x^2+y^2+z^2+\ldots<1,\\&\qquad\text{et}\quad \sigma_1<\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots<\sigma_2;\end{aligned}\right.$$

les valeurs de x_1 et x_2 sont

$$\begin{aligned}&\text{si}\ -1<\frac{\sigma_1}{\rho}<\frac{\sigma_2}{\rho}<+1, && x_1=\frac{\sigma_1}{\rho}\ \text{et}\ x^2=\frac{\sigma_2}{\rho},\\&\text{si}\ -1>\frac{\sigma_1}{\rho}<\frac{\sigma_2}{\rho}<+1, && x_1=-1\ \text{et}\ x_2=\frac{\sigma_2}{\rho},\\&\text{si}\ -1>\frac{\sigma_1}{\rho}<\frac{\sigma_2}{\rho}>+1, && x_1=\frac{\sigma_1}{\rho}\ \text{et}\ x_2=+1,\\&\text{si}\ -1>\frac{\sigma_1}{\rho}<\frac{\sigma_2}{\rho}>+1, && x_1=-1\ \text{et}\ x_2=+1.\end{aligned}$$

Les formules (5), (6) et (7) deviennent un peu plus générales quand on remplace $x, y, z,\ldots$, par $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c},\ldots$, et $\alpha, \beta, \gamma,\ldots$, par $a\alpha, b\beta, c\gamma,\ldots$, ce qui donne

$$\rho=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2+\ldots}.$$

Dans le cas très-simple

$$f(t)=1,\quad \varphi(s)=1,\quad n=3,\quad \sigma_1=\mu<1,\quad \sigma_2=1,$$

l'intégrale

$$V=\int\int\int dx\,dy\,dz,$$

$$\mu<\alpha x+\beta y+\gamma z<1,\qquad 0<\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1,$$

donne le volume de la partie d'un ellipsoïde comprise entre les deux plans parallèles dont les équations sont

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \mu,$$

et

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1;$$

on trouve à l'aide de la formule (7) que ce volume est égal à

$$2\pi abc \int_{\frac{\mu}{\rho}}^{\frac{1}{\rho}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dx\,dy = \pi abc \left(\frac{1-\mu}{\rho} - \frac{1}{3}\frac{1-\mu^3}{\rho^3}\right),$$

$$\rho = \sqrt{a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2}.$$

Ce résultat se vérifie aisément par les méthodes ordinaires.

Prenons maintenant dans la formule (5)

$$n = 3, \quad f(t) = 1,$$

et

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\omega, \quad z = r\sin\theta\sin\omega;$$

alors nous trouvons

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha r\cos\theta + \beta r\sin\theta\cos\omega + \gamma r\sin\theta\sin\omega)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\omega$$
$$= \pi \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)\varphi(\rho x)\, dx, \qquad (\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}).$$

De cette formule on peut déduire un théorème de Poisson; en effet, si l'on pose

$$\int_0^1 x^2 \varphi(\rho x)\, dx = \psi(\rho),$$

ou

$$\int_0^\mu t^2 \varphi(t)\, dt = \mu^3 \psi(\mu),$$

on trouve d'abord par différentiation

$$\varphi(\mu) = 3\psi(\mu) + \mu\psi'(\mu),$$

et d'après cela :

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta\cos\omega+\gamma\sin\theta\sin\omega)\sin\theta\,d\theta\,d\omega$$

$$=\pi\int_{-1}^{+1}(1-x^2)[3\psi(\rho x)+\rho x\,\psi'(\rho x)]\,dx=2\pi\int_{-1}^{+1}\psi(\rho x)\,dx,$$

ce qui est le théorème mentionné.

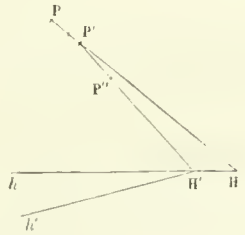
SUR

UNE LIGNE GÉODÉSIQUE DE L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, M. Hart a établi la loi simple qui détermine l'inclinaison du plan osculateur en un point quelconque d'une ligne géodésique passant par un ombilic d'un ellipsoïde sur le plan qui contient les ombilics. Ce savant géomètre s'est appuyé sur l'expression de la fonction P, qui figure d'une manière si importante dans cette théorie, et qui a été introduite par mon frère Michael Roberts. En cherchant à en déduire l'équation de M. Hart, mon frère a adopté une méthode qui conduit à des calculs un peu longs (*Journal de Mathématiques*, tome XV, pages 284-285). Ces calculs peuvent s'éviter en se servant d'une démonstration extrêmement simple, que j'ai présentée dans des leçons sur la géométrie des surfaces du second degré, en 1854.

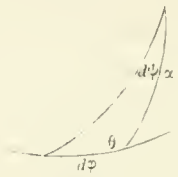
La voici :



Soit PP′ un élément quelconque d'une ligne géodésique ombilicale, lequel, prolongé jusqu'au plan des ombilics, rencontrera l'hyperbole focale en un point H; et à ce point, soit Hh la tangente à l'hyperbole focale. Un cône ayant H pour sommet, et circonscrit à l'ellipsoïde, sera de révolution, et Hh en sera un axe principal. Donc la normale au cône au point P ou, ce qui est la même chose, à l'ellipsoïde, va rencon-

trer la droite Hh. Par conséquent, le plan PHh est le plan osculateur de la ligne géodésique. Ce plan contient donc l'élément prochain P′P″ de cette ligne. Prolongez P′P″ jusqu'à rencontrer Hh dans H′, qui sera évidemment le point de l'hyperbole focale infiniment prochain à H, et soit H′h' la tangente à l'hyperbole focale à H′, ce qui donnera le plan P′H′h' pour le plan osculateur consécutif à PHh.

Désignons maintenant par α le demi-angle du cône circonscrit, par $d\varphi$ l'angle hH′h' ou bien l'angle de contingence de l'hyperbole focale, par $d\psi$ l'angle formé par les deux plans osculateurs consécutifs, et par θ l'inclinaison du plan osculateur au point P sur le plan hH′h', ce qui est le plan des ombilics. Concevons aussi une sphère décrite autour du point H′. On formera ainsi un triangle sphérique



ayant pour côtés $d\varphi$, α, $\alpha + d\alpha$, et pour angles $d\psi$, θ, $\pi - \theta - d\theta$, cela nous donnera évidemment

$$\sin \alpha d\psi = \sin \theta d\varphi.$$

Mais on a aussi

$$\cos \alpha d\psi = d\theta \quad [*],$$

ce qui nous donne en éliminant $d\psi$,

$$\frac{d\theta}{\sin \theta} = \cot \alpha d\varphi.$$

Cette équation peut être regardée en quelque sorte comme fondamentale, et l'on peut en faire découler toutes les propriétés des lignes géodésiques ombilicales sans recourir aux coordonnées elliptiques. Mais pour nous borner au sujet actuel, nous chercherons à faire dépendre

[*] Cette formule peut se démontrer ainsi. L'aire du triangle infiniment petit est égale d'une part à $(1 - \cos \alpha)\, d\psi$, et d'autre part à l'excès sphérique qui est

$$\theta + (\pi - \theta - d\theta) + d\psi - \pi.$$

le second membre de cette équation d'une seule quantité. L'équation de l'ellipsoïde étant, comme de coutume,

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

l'hyperbole focale sera donnée par le système

$$cx = b\rho',$$
$$cz = \sqrt{c^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2},$$

ρ' étant le demi-axe majeur de l'ellipse homofocale passant par un point (x, z) sur l'hyperbole focale.

Mais

$$d\varphi = d\left(\text{arc tang}\,\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{b\sqrt{c^2 - b^2}\,d\rho'}{(\rho'^2 - b^2)\sqrt{\rho'^2 - c^2}},$$

et l'on aura, en vertu de l'équation bien connue des tangentes d'une conique qui appartient à un système homofocal,

$$\rho'^2 \sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha = \rho^2,$$

ce qui donne

$$\cot^2\alpha = \frac{\rho'^2 - \rho^2}{\rho^2 - b^2},$$

en sorte qu'on a

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = -b\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}}\sqrt{\frac{\rho'^2 - \rho^2}{\rho'^2 - c^2}}\,\frac{d\rho'}{\rho'^2 - b^2}.$$

Or à l'ombilic, point pour lequel $\rho' = \rho$, l'angle θ devient égal à l'angle polaire ω que fait la ligne géodésique avec la section principale située dans le plan des xz; on a donc

$$\int_\omega^\theta \frac{d\theta}{\sin\theta} = -b\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}}\int_\rho^{\rho'}\sqrt{\frac{\rho'^2 - \rho^2}{\rho'^2 - c^2}}\,\frac{d\rho'}{\rho'^2 - b^2},$$

ou bien

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\omega} = e^{-b\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}}\int_\rho^{\rho'}\sqrt{\frac{\rho'^2 - \rho^2}{\rho'^2 - c^2}}\,\frac{d\rho'}{\rho'^2 - b^2}}.$$

Puisque le point (ρ'), sur l'hyperbole focale, répond au point de la

ligne géodésique où le plan osculateur a l'inclinaison θ, on verra qu'à l'extrémité du moyen axe on a simultanément

$$\rho' = \infty, \quad \theta = \frac{1}{2}\pi.$$

Par conséquent, si l'on joint l'extrémité de l'axe moyen avec un ombilic par une ligne géodésique, elle fera avec la section principale un angle Ω donné par la formule

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\Omega = e^{b\sqrt{\frac{c^2-b^2}{\rho^2-b^2}}} \int_{\rho}^{\infty} \sqrt{\frac{\rho'^2-\rho^2}{\rho'^2-c^2}} \frac{d\rho'}{\rho'^2-b^2}.$$

ÉLOGE

DE

CHARLES-GUSTAVE-JACOB JACOBI;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET [*].

(Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 1er juillet 1852.)

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR M. JULES HOÜEL.

MESSIEURS,

Au moment de tracer devant vous le tableau des travaux scientifiques du plus grand mathématicien qui, depuis Lagrange, ait fait partie de notre Société comme membre résidant, je sens vivement combien est difficile la tâche de faire connaître toute la portée des découvertes d'un homme qui, s'emparant en maître du domaine immense conquis à la science par les efforts accumulés de vingt siècles, a, partout où il a porté son génie créateur, mis au jour des vérités importantes, souvent profondément cachées; introduit dans la science des idées nouvelles, fondamentales; élevé enfin, et sur plus d'un point, les spéculations mathématiques à une hauteur inconnue avant lui. La conviction qu'après de tels services rendus à la science et à ceux qui la cultivent, il y a pour la reconnaissance un devoir à remplir, a pu seule imposer silence aux scrupules que m'inspirait le sentiment de mon insuffisance. Et sur qui retombait l'obligation d'acquitter une telle dette, plus que sur moi qui, après avoir, avec tous les savants contemporains, tiré un

[*] Extrait des *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1852, reproduit déjà, mais toujours en allemand, dans le *Journal de M. Crelle*. Le savant rédacteur de ce Journal remarque avec raison que « cet Éloge est en même temps un excellent Mémoire » et un jugement profond sur les travaux mathématiques de Jacobi. » (J. LIOUVILLE.)

si grand profit de la lecture des productions géométriques de Jacobi, n'ai pas trouvé moins de secours dans un commerce étroit de plusieurs années avec cet homme illustre?

Charles-Gustave-Jacob Jacobi naquit, le 10 décembre 1804, à Potsdam, d'un négociant aisé de cette ville. Il apprit les premiers éléments des langues anciennes et des mathématiques de son oncle maternel, M. Lehmann, qui eut moins à stimuler qu'à diriger l'ardent enfant, et sous la conduite intelligente duquel Jacobi fit de si rapides progrès, qu'avant d'avoir atteint l'âge de douze ans, il fut reçu dans la seconde classe du gymnase de Potsdam, pour passer, six mois après, dans la première. Il resta dans celle-ci quatre ans entiers, parce qu'il ne pouvait convenablement entrer à l'Université avant d'avoir accompli sa seizième année. L'enseignement mathématique, qui était traité comme une affaire de mémoire, ne pouvait convenir au jeune élève. Cela rendit pendant quelque temps ses rapports avec le professeur peu agréables; ils finirent cependant par devenir meilleurs, du jour où le professeur eut assez de sagacité pour comprendre qu'il devait accorder plus de liberté à l'élève exceptionnel, et lui permit de s'occuper de l'*Introductio* d'Euler, pendant que les autres élèves récitaient péniblement par cœur des propositions élémentaires. On peut voir à quel point l'intelligence de Jacobi s'était déjà développée, d'après les essais auxquels il se livra dès ce temps-là sur la résolution de l'équation du cinquième degré, recherches dont il a fait mention depuis dans un de ses Mémoires.

C'est un problème où plus d'un géomètre, parmi ceux qui se sont fait par la suite un grand nom, a trouvé le premier exercice de ses forces, et l'on conçoit aisément, en effet, l'attrait spécial que ce problème devait offrir à un talent naissant, alors que l'impossibilité d'une solution telle qu'on la cherchait n'était pas encore démontrée. A la célébrité que tant d'efforts infructueux avaient donnée à cette question, se joignait cette circonstance particulière, que le problème, appartenant à une branche qui touche immédiatement aux éléments, semblait pouvoir être abordé sans une grande somme de connaissances acquises.

A l'Université de notre ville, Jacobi partageait son temps entre les études philosophiques, philologiques et mathématiques. La part qu'il prenait aux études du séminaire philologique attira l'attention de notre

confrère Bœckh, directeur de cet établissement. Ce savant, frappé de la pénétration et de l'originalité d'esprit qu'il montrait, le prit en amitié, et lui témoigna une bienveillance toute particulière.

Le jeune étudiant suivit peut-être avec moins d'assiduité les cours de mathématiques, qui avaient alors, dans notre Université, un caractère trop élémentaire pour un jeune homme déjà familiarisé avec quelques-uns des chefs-d'œuvre d'Euler et de Lagrange. Il n'en mit que plus d'ardeur à lire les ouvrages des géomètres, et spécialement à se faire une idée générale des précieux trésors que renferment les collections académiques.

Jacobi, dont le génie ne pouvait se contenter d'amasser simplement des connaissances, et qui sentait le besoin de se rendre tout à fait maître des sujets dont il s'occupait, reconnut, après deux années environ d'études universitaires, la nécessité de prendre un parti, et de renoncer soit à la philologie, soit aux mathématiques. La résolution qu'il prit a eu des conséquences si importantes, non-seulement pour lui, mais aussi pour la science à laquelle il se consacra dès lors exclusivement, qu'on sera bien aise d'apprendre de lui-même les raisons qui le déterminèrent. Il écrivait à ce sujet à son oncle, que nous avons déjà nommé : « Après avoir quelque temps étudié la philologie assez sé-
» rieusement pour réussir à mesurer au moins du regard les splen-
» deurs de la vie de la Grèce antique, il m'en coûte de renoncer à en
» poursuivre l'étude, car j'y dois désormais renoncer absolument.
» L'édifice colossal élevé par les travaux des Euler, des Lagrange, des
» Laplace, exige de celui qui veut en approfondir la nature intime et
» ne pas se borner à en considérer la surface, une puissance et des ef-
» forts prodigieux de réflexion. Un désir violent pousse à le dominer,
» pour n'avoir plus à craindre à chaque instant d'en être écrasé, désir
» qui ne connaît ni trêve, ni repos, jusqu'à ce qu'arrivé au faîte, on
» plane du regard sur tout l'ouvrage. C'est alors seulement que l'on
» peut avec sécurité travailler à l'accomplissement de sa tâche indivi-
» duelle, et contribuer selon ses forces à l'agrandissement de cet en-
» semble immense, dont on a bien saisi le plan. »

Jacobi choisit pour sujet de dissertation pour le doctorat une question traitée déjà bien souvent, la décomposition des fractions algébriques. Il commence par démontrer des formules remarquables que

Lagrange avait données sans démonstration dans les Mémoires de notre Académie; il passe ensuite à un nouveau mode de décomposition qui n'est pas complétement déterminé, comme celui que l'on avait jusque-là considéré exclusivement. Il termine son travail par des recherches sur la transformation des séries, et il y fait déjà remarquer un nouveau principe dont il s'est servi en plus d'une occasion dans ses travaux ultérieurs.

Aussitôt après sa promotion, Jacobi se fit agréger à l'Université, et il ouvrit un cours sur la théorie des surfaces courbes et des lignes à double courbure. D'après le témoignage d'un de ses auditeurs d'alors [*], son talent pour l'enseignement était, dès ce premier début, très-développé, et il entendait déjà l'art d'exposer un sujet avec une grande clarté et de captiver son auditoire. Le professeur de vingt et un ans fit preuve aussi d'une maturité de jugement bien précoce, en ce que, sans se laisser égarer par le discrédit dans lequel la méthode des infiniment petits était tombée vers ce temps-là, sous le poids d'une grande autorité, ce fut précisément cette méthode qu'il suivit dans ses démonstrations : par ses efforts, couronnés du plus heureux succès, il convainquit ses auditeurs que la méthode frappée de suspicion ne diffère de la méthode rigoureuse des Anciens que par sa forme abrégée, qui en rend l'emploi pour ainsi dire indispensable dans toutes les questions compliquées.

L'attention que Jacobi commençait à éveiller détermina le chef de l'instruction publique à l'inviter à continuer ses leçons à Kœnigsberg, provisoirement comme professeur particulier, la chaire de mathématiques, qui était devenue vacante depuis peu dans cette ville, lui offrant plus de chances d'avancement qu'il n'en avait à Berlin.

En s'établissant à Kœnigsberg, ce fut pour Jacobi un événement important de faire la connaissance personnelle du grand astronome Bessel, et de voir de près, pour la première fois, un homme de génie adonné à une science liée si étroitement avec celle qu'il cultivait lui-même. La vue journalière de l'activité dévorante qui animait cet homme extraordinaire exerça sur notre géomètre la plus puissante influence,

[*] M. *Minding*, aujourd'hui professeur à l'Université de Dorpat, et auteur d'ingénieuses recherches sur la théorie générale des surfaces, sur les fonctions abéliennes, sur l'élimination, etc. (J. Liouville.)

bien que lui aussi fût accoutumé depuis son jeune âge à exiger de lui-même les plus grands efforts. Plus tard, Jacobi a souvent rappelé avec reconnaissance ce qu'il devait à ces relations.

Par une rencontre heureuse, les débuts de Jacobi coïncidèrent avec la fondation du *Journal de Mathématiques* par la publication duquel notre confrère Crelle s'est acquis un renom durable, et a rendu le double service, non-seulement de répandre les connaissances acquises, mais encore de donner une vie nouvelle aux études scientifiques. Jacobi, qui fut un des premiers collaborateurs de ce recueil, lui est resté fidèle jusqu'à sa mort; et, à l'exception de deux ouvrages séparés, les *Fundamenta nova* et le *Canon arithmeticus*, presque tous ses autres travaux ont paru pour la première fois dans le Journal de Crelle.

Les premières publications de Jacobi le montrent déjà mathématicien consommé, soit que, comme dans les Mémoires *sur la nouvelle méthode de Gauss pour le calcul approximatif des intégrales*, et *sur la méthode de Pfaff pour l'intégration des équations aux différentielles partielles*, il considère sous un nouveau point de vue des théories connues et y apporte des simplifications essentielles; soit qu'il traite des problèmes non encore résolus et qu'il arrive à des résultats nouveaux. Parmi les travaux de cette dernière catégorie, il y en a deux qui méritent ici une mention particulière : un Mémoire de quelques pages, où il s'occupe d'une propriété fondamentale de la fonction remarquable qui, introduite pour la première fois dans la science par Legendre, a joué un si grand rôle dans toutes les recherches qui ont été faites depuis sur l'attraction; et un autre Mémoire *sur les résidus cubiques*. Ce dernier ne contient, il est vrai, que des propositions sans démonstration; mais ces propositions sont de telle nature, qu'elles ne peuvent être le résultat de l'induction, et elles ne permettent pas de douter que, dans la nouvelle voie ouverte par Gauss depuis un quart de siècle à la spéculation mathématique, et se rattachant autant à l'algèbre supérieure qu'à la théorie des nombres, Jacobi ne dût être déjà à cette époque en possession de nouveaux et féconds principes. C'est ce qui a été confirmé par une publication plus récente, où il dit expressément que, dès ce temps-là, il avait communiqué ces principes à Gauss par une lettre.

D'autres travaux empêchèrent à cette époque Jacobi de poursuivre

ses études sur cet objet : ce furent ses recherches sur les fonctions elliptiques, qui devaient bientôt lui mériter tant de gloire, et lui assurer une place parmi les premiers mathématiciens du temps.

Le jeune géomètre, qui s'était déjà essayé avec succès dans tant de directions différentes, sembla quelque temps abandonné de son bonheur habituel dans la théorie des fonctions elliptiques. Un de ses amis [*], le trouvant un jour de fort mauvaise humeur, lui en demanda la cause. « Vous me voyez », répondit-il, « songeant en ce » moment à renvoyer ce livre (les *Exercices*, de Legendre) à la bi- » bliothèque; décidément je joue de malheur avec lui. Toutes les » fois que j'ai étudié un ouvrage important, cela m'a toujours suggéré » quelques idées neuves, et j'y ai toujours gagné quelque chose. Cette » fois, ma lecture me laisse les mains complétement vides, et ne m'a » pas inspiré la moindre idée. »

Si les idées neuves se firent dans cette circonstance un peu attendre, elles n'en furent que plus abondantes lorsqu'elles se présentèrent plus tard; tellement abondantes que, réunies aux idées contemporaines d'Abel, elles eurent pour résultat un développement inattendu et une transformation complète d'une des branches les plus importantes de l'Analyse.

Puisque les découvertes partaient ici en même temps de deux points différents, il est nécessaire de citer à côté des recherches de Jacobi les travaux contemporains d'Abel. Indépendantes entre elles à l'origine, leurs découvertes finirent par s'enchaîner si intimement qu'on aurait peine à se faire comprendre en exposant les unes sans parler des autres.

L'origine de la théorie des fonctions elliptiques, à laquelle les noms d'Abel et de Jacobi sont pour toujours attachés, ne remonte pas plus haut que le milieu du dernier siècle. Un mathématicien italien, doué d'une pénétration extraordinaire, le comte Fagnano, de l'État de l'Église, fit cette remarquable découverte, que l'intégrale qui exprime l'arc de la courbe dont les mathématiciens s'étaient alors souvent occupés sous le nom de *lemniscate*, possède des propriétés semblables à celles de l'intégrale plus simple qui exprime un arc de cercle, et que,

---

[*] Le célèbre physicien, M. *Dove*. (J. Liouville.)

par exemple, entre les limites de deux intégrales de cette espece, dont l'une a une valeur double de l'autre, il existe une relation algébrique simple, si bien qu'un arc de lemniscate, quoique étant une transcendante d'une classe plus élevée, peut cependant, comme un arc de cercle, être doublé ou divisé en deux parties égales par une construction géométrique. Euler trouva, quelques années plus tard, le principe même de cette propriété et d'autres semblables dans une proposition, l'une des plus belles dont ce grand inventeur ait enrichi la science. D'après cette proposition d'Euler, une certaine intégrale, plus générale que l'intégrale considérée par Fagnano, et désignée dans notre terminologie actuelle sous le nom d'*intégrale elliptique de première espèce*, a une telle dépendance avec sa limite, que deux intégrales semblables, à limites arbitraires, peuvent toujours être réunies en une troisième, dont la limite est liée à celles des premières par une relation algébrique simple; absolument comme le sinus d'un arc composé de deux parties peut s'exprimer algébriquement au moyen des sinus des arcs composants. Mais l'intégrale elliptique est plus générale que celle qui exprime un arc de cercle. Ramenée à sa forme la plus simple, elle ne dépend pas seulement, comme l'arc circulaire, de sa limite, mais encore d'une autre quantité renfermée dans la fonction, et appelée *module*. Le théorème d'Euler ne donnait que des relations entre des intégrales de même module. Le premier exemple d'une relation entre des intégrales de modules différents se trouve dans une découverte faite plus tard par Landen, et sous une forme un peu différente par Lagrange : par cette découverte, une intégrale elliptique peut, au moyen d'une substitution algébrique très-simple, être changée en une autre intégrale de même genre.

C'est la gloire impérissable de Legendre d'avoir reconnu dans les découvertes que nous venons de rappeler le germe d'une branche importante de l'Analyse, et d'avoir, par un travail qui a occupé la moitié de sa vie, élevé sur ces fondements une théorie régulière, embrassant toutes les intégrales où il n'entre pas d'autre irrationnalité qu'un radical carré sous lequel la variable ne dépasse pas le quatrième degré. Déjà Euler avait montré par quelles modifications son théorème peut être étendu à de telles intégrales. Legendre, partant de l'idée heureuse de ramener toutes ces intégrales à des formes normales fixes, parvint

à cette découverte devenue si importante pour le développement de la théorie, que ces intégrales se partagent en trois espèces essentiellement différentes. En soumettant alors chaque espèce à un examen attentif, il découvrit beaucoup de leurs propriétés les plus importantes, entre autres celles qui concernent les intégrales de troisième espèce, propriétés très-cachées et d'un accès extrêmement difficile. Ce n'est que par la persévérance opiniâtre avec laquelle le grand mathématicien revint sans cesse sur le même objet, qu'il réussit à vaincre des difficultés qui, si l'on songe aux moyens dont il pouvait disposer, devaient paraître presque insurmontables.

La théorie, telle que la trouvèrent Abel et Jacobi, offrait plusieurs points enveloppés d'un profond mystère, et sur lesquels les principes connus jusqu'alors ne pouvaient jeter aucun jour. Ainsi, pour ne citer qu'un de ces points, on avait trouvé que le degré de l'équation formée à l'aide du théorème d'Euler, et de la résolution de laquelle dépend la division de l'intégrale elliptique, n'est pas égal, comme dans la question analogue sur la division du cercle, au nombre des parties, mais au carré de ce nombre. La signification des racines réelles, dont le nombre coïncide avec celui des parties, était facile à voir, tandis que la présence des racines imaginaires, beaucoup plus nombreuses, devait paraître tout à fait inexplicable. Mais personne avant Abel et Jacobi ne s'était aperçu qu'il y eût là un mystère caché, et c'est à eux qu'il était réservé de s'étonner les premiers de cette circonstance et d'autres semblables. En mathématiques comme dans d'autres sciences, s'étonner à propos, c'est souvent avoir fait déjà la moitié d'une découverte.

Quoique la transformation de la théorie des fonctions elliptiques due à Abel et à Jacobi soit résultée du concours de plusieurs idées qui se prêtent un appui mutuel, il me semble cependant que deux de ces idées méritent qu'on leur attribue la plus grande importance, parce qu'elles pénètrent intimement toutes les parties de la nouvelle théorie. Tandis que ceux qui avaient travaillé avant eux sur ce sujet, considéraient l'intégrale elliptique de première espèce comme une fonction de sa limite, Abel et Jacobi reconnurent, chacun de leur côté, sans s'être entendus (bien que le premier eût précédé l'autre de quelques mois), la nécessité de renverser la question, et de considérer la limite et deux autres quantités liées inséparablement avec elle de même que le sinus

l'est avec le cosinus, comme des fonctions de l'intégrale; c'est ainsi qu'on était arrivé plus anciennement à la connaissance des plus importantes propriétés des transcendantes qui dépendent du cercle, en considérant le sinus et le cosinus comme des fonctions de l'arc, et non celui-ci comme une fonction de ceux-là.

Une seconde idée, commune à Abel et à Jacobi, celle d'introduire les imaginaires dans cette théorie, eut une influence encore plus décisive; et Jacobi a, depuis, souvent répété que l'introduction des imaginaires seule avait donné le mot de toutes les énigmes que présentait l'ancienne théorie. Si l'expérience n'avait pas appris depuis si longtemps que ce qui est le plus près de nous est presque toujours ce que nous apercevons en dernier lieu, on devrait trouver singulier que cette idée ait échappé à Euler, qui en traitant, dans une de ses premières et de ses plus belles productions, les fonctions circulaires comme des exponentielles imaginaires, en a étendu et simplifié à un tel point la théorie, qu'il en est résulté une transformation complète de presque tout le domaine de l'analyse.

En introduisant les imaginaires dans les fonctions dont nous venons de parler, qui sont les inverses de l'intégrale elliptique de première espèce, et auxquelles notre terminologie actuelle réserve exclusivement le nom de *fonctions elliptiques*, Abel et Jacobi reconnurent que ces fonctions participent à la fois de la nature des fonctions circulaires et de celle des exponentielles : ces deux dernières classes de fonctions sont périodiques, les unes seulement pour des valeurs réelles, les autres seulement pour des valeurs imaginaires de l'argument; les fonctions elliptiques réunissent en elles les deux sortes de périodicité.

Placés, par ces deux idées fondamentales, sur un terrain nouveau, Abel et Jacobi dirigèrent leurs recherches vers deux régions différentes de la théorie. L'activité d'Abel se tourna vers les problèmes qui concernent la multiplication et la division des intégrales elliptiques, et pénétrant profondément, à l'aide du principe de la double périodicité, dans la nature des racines de l'équation dont la division dépend, il parvint à cette découverte, tout à fait inattendue, que la division générale de l'intégrale elliptique avec une limite quelconque peut toujours s'effectuer algébriquement, c'est-à-dire par de simples extractions de racines, dès que l'on considère comme un problème résolu le problème

de la division dans le cas particulier de l'intégrale complète. Ce dernier problème ne semble pouvoir être résolu que pour des modules particuliers, parmi lesquels le plus simple est celui qui correspond à la lemniscate. En poursuivant dans ce cas la solution du problème, Abel fit voir que la division de la lemniscate entière est tout à fait analogue à celle du cercle, et peut s'effectuer par une construction géométrique dans les mêmes cas pour lesquels, d'après la belle théorie donnée par Gauss vingt-cinq ans auparavant, une telle division est possible pour le cercle.

A ce dernier travail d'Abel se rattache une particularité historique remarquable. Dans l'introduction à la dernière section des *Disquisitiones arithmeticæ*, qui est consacrée à la division du cercle, Gauss avait remarqué en passant que le principe sur lequel repose cette division est aussi applicable à la division de la lemniscate; et en effet, le principe de Gauss, en vertu duquel les racines de l'équation à résoudre doivent être disposées en cercle de façon que chacune d'elles se déduise de la précédente d'après une même loi, sert réellement de fondement au Mémoire d'Abel sur la division de la lemniscate. Mais tandis que dans la division du cercle les propriétés anciennement connues des fonctions trigonométriques suffisaient pour disposer les racines conformément au principe de Gauss, il fallait dans le cas de la lemniscate, pour effectuer une disposition semblable, avoir sur la nature des racines des notions que le principe de la double périodicité pouvait seul fournir. Cette indication des *Disquisitiones* constitue, depuis la publication du Mémoire d'Abel, un témoignage irrécusable de ce fait que Gauss, devançant de loin son temps, avait, dès le commencement de ce siècle, reconnu le principe de la double périodicité. Mais ce témoignage n'étant devenu intelligible que par le travail même d'Abel, ne diminue en rien ses droits ni ceux de Jacobi à cette découverte.

Outre les résultats dont nous venons de parler concernant la division, les recherches d'Abel aboutirent encore à une autre découverte non moins importante. En supposant le multiplicateur infini dans les formules qui expriment les fonctions elliptiques d'un multiple de l'argument au moyen de celles de l'argument simple, il obtint des expressions remarquables des fonctions elliptiques sous forme de séries in-

finies, et aussi sous forme de quotients de produits infinis : découverte plus importante encore peut-être pour l'analyse que la démonstration donnée par Abel de la résolubilité des équations relatives à la division.

En même temps qu'Abel poursuivait ses belles recherches, Jacobi de son côté n'était pas moins heureux sur un autre point de cette théorie. La substitution dont nous avons parlé plus haut, au moyen de laquelle une intégrale elliptique se change en une autre intégrale de même forme, était jusqu'alors la seule de son espèce. Legendre, il est vrai, peu de temps avant que Jacobi ne s'adonnât à cette étude, avait découvert une seconde transformation des intégrales elliptiques; mais cette seconde transformation, après laquelle, suivant lui, il n'y avait plus à revenir sur cet objet, n'était pas encore connue en Allemagne, et il fallait une singulière pénétration d'esprit pour conclure de la vue d'un seul anneau à l'existence d'une chaîne infinie, et une audace non moins grande pour se proposer comme un problème à résoudre l'étude de la nature de cette chaîne.

Par une heureuse induction, à laquelle avait essentiellement contribué cette belle idée, tout à fait neuve, de considérer la transformation et la multiplication d'un point de vue commun, et la dernière comme un cas particulier de la première, Jacobi fut conduit à cette conjecture, que des fonctions rationnelles d'un degré quelconque devaient être propres à transformer une intégrale elliptique dans une autre intégrale de même forme. La conjecture se trouva confirmée dès qu'il fut reconnu que le nombre des coefficients arbitraires dont on peut disposer pour chaque degré suffit pour satisfaire à toutes les conditions qui doivent être remplies pour que l'intégrale transformée conserve la même forme que la proposée. Mais si cette considération simple levait à peu près tous les doutes sur la possibilité de la chose, il restait encore un grand pas à faire pour connaître intimement le caractère analytique des expressions fractionnaires propres à la transformation. De quelle espèce étaient les difficultés à vaincre dans cette recherche, et par quelles considérations ingénieuses Jacobi s'en rendit-il maître, c'est ce que je ne puis exposer ici, non plus qu'il ne m'est permis d'énumérer toutes les conséquences importantes qui découlèrent de la complète résolution du problème. Je citerai seulement un résultat remarquable

de ces recherches : c'est que la multiplication peut toujours s'effectuer par la combinaison de deux transformations.

Abel et Jacobi perfectionnaient ainsi la théorie en même temps dans deux directions différentes, et il semblait que le destin voulût partager également entre les deux jeunes émules l'honneur du progrès qui était à accomplir; car la manière dont l'un complétait la découverte que l'autre venait de faire ne permettait pas de douter que chacun d'eux, s'il n'eût été précédé par l'autre dans une partie du travail, ne l'eût à lui seul exécuté dans toute son étendue.

Jacobi dans ses recherches était parti de la supposition que, dans la transformation, la variable primitive est exprimée rationnellement au moyen de la nouvelle variable. Abel traita le problème en partant de l'hypothèse plus générale, qu'il existe entre les deux variables une équation algébrique quelconque, et il arriva à ce résultat, que le problème ainsi généralisé peut toujours être ramené au cas que Jacobi avait si complétement traité.

Avec non moins de succès, Jacobi entra dans la théorie de la division générale donnée par Abel. La manière dont Abel avait résolu le problème montrait bien que les racines peuvent toujours être exprimées algébriquement; mais elle exigeait pour le calcul effectif des racines qu'on formât certaines fonctions symétriques de ces racines, ce qui ne pouvait s'effectuer que dans chaque cas particulier. D'un nouveau principe sur lequel nous entrerons bientôt dans quelques détails, Jacobi déduisit les expressions définitives des racines pour un degré quelconque, formées actuellement au moyen des données du problème, et ayant en outre sur les expressions d'Abel l'avantage d'être plus simples. Jacobi, lorsqu'il fit connaître dans une courte Note le résultat de ce travail, espérait exciter l'étonnement d'Abel par ce perfectionnement apporté à la solution du problème de la division ; mais cette espérance fut déçue. Abel venait de mourir à l'âge de vingt-sept ans à peine, moins de deux ans après la publication de ses premiers travaux sur les fonctions elliptiques. La mort avait mis un terme prématuré à la brillante carrière de ce vaste et profond génie.

Les recherches ultérieures de Jacobi sur les transcendantes elliptiques découlent, comme celles dont nous venons de parler en dernier lieu, d'une idée qui, par les conséquences qu'elle a eues pour la science,

mérite peut-être la première place parmi les conceptions de son auteur. Ce fut l'idée d'introduire comme de nouvelles transcendantes dans l'analyse les produits infinis eux-mêmes, dont les quotients avaient servi à Abel pour exprimer les fonctions elliptiques. Ayant réussi à développer en séries ces produits qui sont tous de même nature, et doivent être considérés comme des cas particuliers d'une seule et même transcendante, il reconnut une fonction que des mathématiciens français avaient déjà rencontrée dans des recherches de physique mathématique, mais à laquelle ils avaient fait peu d'attention, et dont ils n'avaient remarqué qu'une seule propriété. Jacobi la soumit à un examen approfondi; il détermina son caractère analytique et l'introduisit ensuite dans la théorie des intégrales de seconde et de troisième espèce; ce qui eut pour résultat d'abord de montrer des relations intimes entre des propriétés déjà connues, mais restées jusque-là isolées, de ces intégrales; ce qui conduisit encore à cette découverte importante, que les intégrales de troisième espèce qui dépendent de trois éléments, peuvent s'exprimer au moyen de la nouvelle transcendante qui n'en renferme que deux.

Dans l'exposition de la théorie entière, telle que Jacobi la donnait plus tard dans ses leçons publiques, la considération de cette fonction sert de point de départ. Non-seulement la doctrine acquiert par là un degré surprenant de simplicité et d'évidence, mais cette marche, inverse de l'ancienne, est remarquable aussi en ce qu'elle est devenue un modèle pour d'autres recherches dont nous parlerons plus tard.

Si l'on considère que la nouvelle fonction domine maintenant toute la théorie des transcendantes elliptiques, que Jacobi a déduit de ses propriétés des théorèmes importants d'arithmétique transcendante, et qu'elle joue un rôle essentiel dans beaucoup d'applications, parmi lesquelles je ne puis citer ici que la théorie du mouvement de rotation donnée au moyen de cette transcendante, théorie qui est un des derniers et des plus beaux travaux de Jacobi, on verra que cette fonction doit prendre place immédiatement après les transcendantes élémentaires les plus anciennement admises dans la science. On voit avec quelque surprise qu'une fonction aussi importante n'ait pas encore d'autre nom que celui de la transcendante Θ, d'après la notation fortuite dont se servit Jacobi en en faisant usage pour la première fois; et les mathématiciens ne

feraient que remplir un devoir de reconnaissance en s'accordant à lui donner le nom de Jacobi pour honorer la mémoire d'un homme dont un des plus beaux titres est d'avoir reconnu le premier la nature et la haute importance de cette transcendante.

Les travaux d'Abel que nous avons cités ne sont pas les seuls travaux de premier ordre que nous devions à ce géomètre éminent; ce ne sont même pas ceux qui ont la plus haute portée. Sa plus grande découverte est un théorème qui porte son nom, et où brille tout l'éclat de ce génie extraordinaire, dont le caractère distinctif était d'embrasser les questions scientifiques dans leur plus grande généralité.

Le théorème d'Euler déjà mentionné (je parle ici de ce théorème considéré comme principe et non des conséquences qu'on en avait tirées, et qui chaque jour s'étendaient plus loin) formait alors, dans la branche à laquelle il appartient, la limite de la science qu'Euler lui-même, Lagrange et les autres devanciers d'Abel s'étaient en vain efforcés de dépasser. Quel étonnement ne devait donc pas exciter une découverte qui, embrassant les intégrales de toutes les fonctions algébriques, en révélait la propriété fondamentale !

Legendre appelle le théorème d'Abel un *monumentum ære perennius*, et Jacobi considère cette proposition « qui, sous une forme » simple et sans appareil de calcul, énonce une des idées mathéma- » tiques les plus profondes et les plus étendues, comme la plus grande » découverte mathématique de notre temps, bien qu'il reste encore à » faire, pour en comprendre toute la portée, un grand travail qui se » fera peut-être longtemps attendre. »

Ce travail est déjà commencé, et c'est Jacobi lui-même qui y a le plus essentiellement contribué.

Les essais que l'on fut porté naturellement à tenter pour introduire dans l'analyse les fonctions inverses des intégrales abéliennes, comme on l'avait fait avec tant de succès pour les intégrales elliptiques, furent bientôt reconnues impraticables, et conduisaient à une inexplicable contradiction; car Jacobi aperçut de suite que ces fonctions inverses devaient avoir quatre périodes ou plus, tandis qu'une fonction analytique, assujettie à n'avoir qu'une valeur unique comme les fonctions elliptiques ou circulaires, et à être continue lorsqu'elle n'est pas infinie, ne peut admettre que deux périodes. Il fallait donc ici tirer du

mystère une nouvelle idée, si l'on voulait que le théorème d'Abel ne restât pas stérile, et devînt la base d'une grande théorie analytique.

Jacobi, après avoir, pendant plusieurs années, examiné ce probleme sous toutes les faces, finit par en trouver le mot : c'est qu'il fallait ici considérer à la fois quatre intégrales ou plus, et en former par inversion deux fonctions ou plus d'un pareil nombre d'arguments. Il fit connaître le résultat de cette divination dans un Mémoire de dix pages qu'il fit suivre deux ans après d'un autre plus étendu, où la nature de ces fonctions inverses est exposée avec la plus grande clarté.

Bien que le moyen trouvé plus tard pour la formation effective de ces fonctions n'appartienne pas à Jacobi, mais à deux jeunes mathématiciens d'un talent hors ligne, je dois cependant mentionner ici cet important progrès où l'on ne peut méconnaître la part due à l'influence de Jacobi. Gœpel et Rosenhain, prenant tous deux modèle sur la seconde méthode de Jacobi pour traiter la théorie des fonctions elliptiques, ont fondé leurs beaux travaux sur la considération de séries infinies dont la loi de formation est plus générale, mais de même nature que celle de la série qui exprime la fonction de Jacobi.

Quoique, dans l'exposition que je viens de faire des découvertes de Jacobi sur les transcendantes elliptiques et abéliennes, je me sois borné au plus essentiel, cette exposition a pourtant pris un développement qui me force à ne donner qu'une revue sommaire des productions de Jacobi dont il me reste à parler, en excluant nécessairement de cette liste beaucoup de travaux qui ne portent que sur des questions isolées, et n'ont fait que perfectionner certains détails de la science.

J'ai déjà parlé plus haut des recherches de Jacobi sur la division du cercle et sur ses applications à l'arithmétique transcendante, comme étant un de ses premiers travaux. Dans ces recherches, où il prit pour base la forme que la solution des équations binômes, donnée pour la première fois par Gauss, avait reçue ensuite de Lagrange, il se rencontra dans quelques résultats avec le grand mathématicien Cauchy, qui s'occupait à la même époque de recherches analogues, et qui fit remarquer cette circonstance lorsqu'il publia ses travaux par extraits pendant le premier séjour de Jacobi à Paris.

D'un beau théorème déduit de la division du cercle, théorème auquel Cauchy était parvenu de son côté, et en vertu duquel tous les

nombres premiers qui, dans la division par un nombre premier donné ou par le quadruple de ce nombre, donnent l'unité pour reste, peuvent, si on les élève à une puissance déterminée dont l'exposant ne dépend que du second nombre premier, être représentés par la forme quadratique principale qui a pour déterminant le nombre premier donné pris négativement, Jacobi tira cette induction, que cet exposant doit coïncider avec le nombre des formes quadratiques différentes qui correspondent au déterminant en question. Comme cette induction se vérifiait pour tous les exemples numériques, il n'hésita pas à faire connaître cette remarque dans une courte Note. Je crois devoir rappeler ici, d'après une communication verbale de Jacobi, l'origine, jusqu'alors inconnue, de ce résultat, comme un exemple remarquable de sa pénétration d'esprit, quoique la démonstration rigoureuse de cette proposition ne semble pas pouvoir être fondée sur la division du cercle, et paraisse exiger des principes essentiellement différents, empruntés au calcul intégral et à la théorie des suites, et qui n'ont été que plus tard introduits dans la science.

Le second Mémoire de Gauss publié en 1832 sur les résidus biquadratiques (Mémoire qui fait époque par l'idée profonde que l'auteur eut de considérer dans l'arithmétique transcendante les nombres complexes sur le même pied que les nombres réels, et par la loi de réciprocité qui s'y trouve énoncée, et qui a lieu dans la théorie des résidus biquadratiques entre deux nombres premiers complexes), donna occasion à Jacobi de reprendre ses premières recherches, et il parvint à déduire très-simplement de la division du cercle cette belle proposition de Gauss, et une autre proposition analogue relative aux résidus cubiques.

Quoique les recherches que je viens de mentionner, et d'autres qui en dépendent et que je ne puis même indiquer, aient été complétement rédigées par Jacobi dans les années de 1836 à 1839, il ne s'est pourtant jamais décidé à les livrer à l'impression. Il en fut toujours détourné par le désir qu'il avait de donner à quelques-uns des résultats qu'il avait obtenus une plus grande généralité, et la multitude des autres travaux qu'il avait entrepris l'a toujours empêché de trouver le loisir nécessaire pour achever son œuvre. Une partie de ses recherches (entre autres la démonstration citée plus haut des lois de réciprocité), est parvenue à la connaissance de quelques mathématiciens allemands

par des cahiers rédigés d'après les leçons qu'il a professées à Kœnigsberg dans l'hiver de 1836 à 1837, sur la division du cercle et ses applications à la théorie des nombres.

Jacobi a découvert une autre source très-féconde en résultats pour l'arithmétique transcendante dans la théorie des fonctions elliptiques, d'où il a déduit de beaux théorèmes sur le nombre des décompositions d'un nombre en deux, en quatre, en six ou en huit carrés, ainsi que d'autres propositions sur les nombres qui sont compris dans plusieurs formes quadratiques à la fois. Ces richesses importantes ajoutées à la science sont une conséquence de l'introduction déjà citée de la fonction de Jacobi dans la théorie des fonctions elliptiques.

Jacobi s'est occupé à plusieurs reprises de la réduction et du calcul des intégrales doubles et multiples. Je mentionnerai ici en particulier la méthode simple par laquelle il ramène la détermination de l'aire d'un ellipsoïde à trois axes inégaux aux intégrales elliptiques de première et de seconde espèce. Legendre n'était arrivé à ce résultat, qui est une de ses belles découvertes, qu'à l'aide de propriétés très-compliquées des intégrales de troisième espèce. Dans un autre Mémoire sur le même sujet, Jacobi a étendu aux intégrales doubles le théorème d'Euler pour l'addition des fonctions elliptiques, et il a remarqué bientôt après que le théorème d'Abel est susceptible d'une pareille extension.

Une partie seulement des travaux de Jacobi sur ce chapitre du calcul intégral a été publiée. Un grand Mémoire ayant pour objet l'attraction des ellipsoïdes, quoique à peu près terminé depuis longtemps, est encore resté inédit et n'est connu que par quelques Notes détachées. En travaillant à ce problème, il parvint de son côté à la belle proposition découverte vers la même époque par Poisson, et d'après laquelle l'attraction exercée sur un point extérieur par une couche infiniment mince comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables et semblablement placées, peut s'exprimer sans le signe d'intégration. Jacobi n'a jamais parlé publiquement de cette circonstance, quoiqu'il eût pu invoquer l'appui du témoignage de plusieurs géomètres à qui il avait communiqué cette proposition avant que le Mémoire de Poisson eût paru.

Aux recherches dont je viens de parler se rattache un autre travail de Jacobi, qui, à cause de son résultat surprenant, ne peut être ici

passé sous silence. Maclaurin a, comme on sait, fait voir le premier qu'une masse fluide homogène peut conserver sa forme extérieure en tournant uniformément autour d'un axe fixe, lorsque cette forme est celle d'un ellipsoïde de révolution; et ce beau résultat a été complété ensuite par d'Alembert et Laplace, qui ont montré qu'à chaque valeur de la vitesse angulaire, pourvu qu'elle ne dépasse pas une certaine limite, correspondent deux formes ellipsoïdales d'équilibre, et deux formes seulement. Lagrange paraît avoir songé le premier à la possibilité de satisfaire aussi aux conditions d'équilibre par un ellipsoïde à trois axes inégaux; du moins ce grand géomètre, en traitant cette question dans la *Mécanique analytique*, part de formules qui peuvent servir pour un ellipsoïde quelconque. Mais après être arrivé ainsi à deux équations de condition où les deux axes équatoriaux entrent d'une manière symétrique, il tire de cette symétrie la conclusion que ces deux axes *doivent* être égaux, tandis qu'il résulte seulement de là que ces axes *peuvent* être égaux, auquel cas les deux équations se réduisent à une seule qui coïncide avec l'équation établie pour la première fois par Maclaurin et discutée par d'Alembert et Laplace.

L'auteur d'un Traité connu, qui a suivi Lagrange dans l'exposition de cette question, ayant accompagné la conclusion trop précipitée dont nous venons de parler du mot *nécessairement*, éveilla les premiers soupçons de Jacobi, qui, en examinant de plus près ces deux équations, trouva bientôt à sa grande surprise, et sans aucun doute à l'étonnement de tous les mathématiciens, qu'un ellipsoïde à axes inégaux peut aussi satisfaire aux conditions d'équilibre.

Jacobi ayant trouvé l'occasion, dans ses recherches sur l'attraction des ellipsoïdes, de s'occuper des surfaces du second degré, on doit à cette circonstance la connaissance de beaucoup de propriétés intéressantes et d'un mode très-élégant de génération de ces surfaces. Les bornes qui me sont imposées m'obligent à m'en tenir à cette indication, et à me contenter de citer les titres des autres travaux de Jacobi consacrés à la géométrie. Je ne ferai donc que mentionner son Mémoire sur un problème de géométrie élémentaire, qui avant lui n'avait été traité que dans des cas particuliers, et dont il déduit la solution complète de la théorie des transcendantes elliptiques; ses recherches sur le nombre des tangentes doubles des courbes algébriques, et quelques

Notes plus courtes où il démontre, avec une grande simplicité et d'une manière purement synthétique, des propositions sur la courbure des surfaces et sur les lignes géodésiques.

Parmi les recherches les plus importantes de Jacobi, il faut ranger celles qu'il a faites sur la mécanique analytique. Hamilton avait fait cette découverte très-intéressante, que l'intégration des équations différentielles de la mécanique peut toujours se ramener à la résolution de deux équations simultanées aux différentielles partielles; mais cette découverte, quelque remarquable qu'elle dût paraître, était restée tout à fait stérile jusqu'au jour où Jacobi la dégagea d'une complication inutile, en faisant voir que la solution à trouver n'est obligée de satisfaire qu'à une seule des deux équations aux différentielles partielles. En traitant (pour ne citer qu'une de ses nombreuses applications), au moyen de la théorie ainsi simplifiée, le problème non encore résolu de la ligne géodésique sur un ellipsoïde à axes inégaux, il parvint, à l'aide d'un instrument analytique qui s'était déjà montré très-utile entre ses mains et qui est maintenant généralement connu sous le nom de *coordonnées elliptiques*, à intégrer l'équation aux différentielles partielles, et à représenter ainsi l'équation de la ligne géodésique sous la forme d'une relation entre deux intégrales abéliennes. Cette découverte de Jacobi est devenue le fondement d'un des plus beaux chapitres de la géométrie transcendante, à l'achèvement duquel les mathématiciens allemands, français et anglais ont à l'envi travaillé.

Par la dépendance dont nous venons de parler entre un système d'équations différentielles ordinaires et *une seule* équation aux différentielles partielles, Jacobi, considérant les choses dans l'ordre inverse, fut ramené à la théorie des équations aux différentielles partielles, dont il s'était déjà occupé dans un de ses premiers Mémoires *sur la méthode de Pfaff*, et il arriva cette fois à ce résultat, que, de toute la série de systèmes d'équations dont Pfaff exige l'intégration successive, la considération du premier rend tous les autres superflus, et qu'ainsi, du premier pas, l'ancienne méthode conduit complétement au but.

Le même caractère se retrouve dans le perfectionnement dont le calcul des variations est redevable à Jacobi. Pour l'existence d'un *maximum* ou d'un *minimum*, l'évanouissement de la première variation est *nécessaire*, mais cette condition n'est pas *suffisante*, et ce n'est que

par l'état de la seconde variation que l'on peut décider s'il y a un *maximum* ou un *minimum*, ou s'il n'y a ni l'un ni l'autre. Selon la théorie connue avant les recherches de Jacobi, après les intégrations nécessaires pour obtenir l'évanouissement de la première variation, il fallait encore effectuer de nouvelles intégrations pour discuter la seconde variation. Jacobi a fait voir que les premières intégrations renferment les secondes, de sorte que, ici encore, la solution complète du problème est connue dès que le premier pas est fait.

Si c'est la tendance de plus en plus prononcée de l'analyse moderne de mettre des idées à la place du calcul, il y a cependant certaines branches des mathématiques où le calcul conserve ses droits. Jacobi, qui a si puissamment favorisé la tendance que je rappelle, a fait aussi dans ces branches, par son habileté de calculateur, de véritables prodiges. C'est à cette spécialité qu'appartiennent ses Mémoires sur la transformation des fonctions homogènes du second degré; sur l'élimination; sur les valeurs simultanées qui satisfont à un certain nombre d'équations algébriques; sur le retour des suites, et sur la théorie des déterminants. Dans ce dernier chapitre de la science, il a enrichi l'analyse de la théorie des expressions désignées par lui sous le nom de *déterminants fonctionnels*. En poursuivant très-loin l'analogie de ces expressions avec les quotients différentiels, il est parvenu à un principe général qu'il a nommé le principe du dernier multiplicateur, et qui, pour presque tous les problèmes d'intégration d'équations différentielles que l'on rencontre dans les applications, donne le moyen d'effectuer la dernière intégration en faisant connaître *à priori* le facteur nécessaire pour cette intégration.

Je ne donnerais qu'une idée incomplète de l'influence exercée par Jacobi sur les progrès de la science, si je ne parlais de l'activité qu'il a déployée dans l'enseignement public. Il n'était pas dans ses habitudes de prendre des sujets connus et déjà exposés pour les exposer de nouveau. Ses cours traitaient des questions tout à fait en dehors des matières des traités classiques, et embrassaient exclusivement les parties de la science où il avait exercé lui-même ses facultés créatrices; et c'est assez dire quelle abondante variété de richesses ils offraient. Son exposition ne se distinguait pas par cette lucidité banale, qui souvent aussi est la part des intelligences vulgaires, mais par une clarté d'un

ordre plus élevé. Il cherchait avant tout à expliquer les idées meres qui servent de base à chaque théorie; et comme il écartait tout ce qui offrait l'apparence d'un artifice, la solution du problème se développait si naturellement devant ses auditeurs, que ceux-ci pouvaient concevoir l'espérance d'en faire un jour autant. Par la manière dont il savait traiter les sujets les plus difficiles, il avait le droit d'encourager ses auditeurs en leur donnant l'assurance qu'en suivant ses leçons, ils n'auraient à s'approprier que des idées toutes simples.

Les résultats d'un mode d'enseignement si inaccoutumé, tel qu'un esprit créateur peut seul l'employer, ont été vraiment extraordinaires. Si maintenant en Allemagne la connaissance des méthodes d'analyse est répandue à un point dont les temps antérieurs n'offrent aucun exemple, si tant de jeunes mathématiciens étendent et enrichissent toutes les parties de la science, c'est grâce à Jacobi surtout que nous jouissons d'un si beau spectacle. Presque tous ont été ses élèves; rarement le germe d'un talent a échappé à sa vigilante attention; jamais le talent, une fois reconnu, n'a manqué auprès de lui de conseils et d'encouragements.

Je me suis efforcé de faire connaître Jacobi comme inventeur, et d'apprécier son influence comme professeur. S'il faut à présent me risquer à le dépeindre tel qu'il apparaissait, en dehors de la sphère scientifique, à ceux qui sont étrangers aux sciences mathématiques, je dirai d'abord, et c'est là le trait dominant de son caractere, qu'il vivait tout entier dans le monde des idées, et que la méditation, à laquelle la plupart même des hommes éminents ne peuvent s'élever qu'en faisant un effort sur eux-mêmes, était devenue pour lui un état habituel, et comme une seconde nature. Si quelque objet, dans les choses de la vie comme dans celles de la science, avait une fois éveillé son attention, il n'avait point de repos qu'il ne s'en fût, à force de travail, approprié l'idée; et à cette infatigable activité d'esprit, il joignait une mémoire si rare que, dès qu'il s'était une fois occupé d'un objet, il en avait toujours le souvenir à sa disposition aussi bien que si l'objet eût été sous ses yeux.

La mine inépuisable de science acquise et d'idées neuves que Jacobi avait incessamment à son service, une rare souplesse d'esprit qui lui permettait de se mettre à la portée de tous les âges et de toutes les intelligences, l'originalité spirituelle de sa parole juste et profonde, don-

naient à la conversation du célèbre mathématicien un grand prix dans la société, prix encore rehaussé par l'empressement avec lequel il abordait sans préparation les questions scientifiques. Cet empressement provenait de l'essence même de son caractère, dont la satisfaction naturelle consistait à vaincre les difficultés, et il trouvait en conséquence un plaisir tout particulier à rendre, par des considérations simples, les faits scientifiques intelligibles à ceux même qui semblaient manquer pour cela des connaissances nécessaires. Seulement, pour tenter une pareille entreprise, il lui fallait la conviction que ceux avec qui il s'entretenait, prenaient à la question un intérêt réel. Mais croyait-il, au contraire, remarquer une insouciante curiosité, ou entendait-il avancer avec suffisance des opinions tranchantes par des personnes qui ne s'étaient jamais assujetties au rude travail de la méditation, alors la patience l'abandonnait, et il mettait fin ordinairement à l'entretien par quelque remarque d'une ironie souvent mordante. On lui a souvent reproché d'avoir trop fait sentir, dans de telles occasions, la conscience qu'il avait de sa supériorité intellectuelle. Mais ceux qui l'ont ainsi critiqué auraient peut-être changé d'opinion s'ils avaient su à quel prix il avait acquis le droit de s'estimer si haut. Une lettre écrite en 1824, dans un temps où Jacobi, encore complétement inconnu, ne pouvait avoir aucun intérêt à peindre ses luttes intellectuelles sous des couleurs chargées, contient le passage suivant, que je transcris ici mot pour mot, parce qu'il jette une vive lumière sur le caractere de cet homme extraordinaire. Jacobi avait alors vingt ans à peine, et depuis une année environ il s'était voué exclusivement aux études mathématiques :

« Il est bien rude le travail que j'ai déjà accompli, et bien rude celui » que j'entreprends d'accomplir encore. Ce n'est ni le labeur, ni la mé- » moire qui me conduiront au but : ils ne sont que d'humbles esclaves » au service de l'idée pure qui se dirige elle-même. Mais la méditation opi- » niâtre, celle qui brise le front, exige plus de puissance que le labeur » le plus soutenu. Si grâce à un exercice continuel de cette méditation » j'y ai acquis quelque force, qu'on ne croie pas qu'elle me soit devenue » facile par quelque heureux don de la nature. C'est un rude, bien » rude travail qu'il me faut soutenir, et le tourment d'esprit que me » causent ces efforts a souvent ébranlé gravement ma santé. Mais la » conscience de la force acquise me donne de mon travail la plus

» belle récompense, et m'encourage de nouveau à le poursuivre sans » relâche. Des hommes sans idées, pour qui ce travail et par suite cette » conscience qu'on a de sa force sont choses tout à fait inconnues, cher- » chent à détruire cette consolation, qui seule pourtant peut empêcher » l'esprit de se laisser défaillir dans cette pénible carrière, en rendant » odieuse, sous les noms de présomption et d'orgueil, la conscience » que l'on a d'être indépendant et libre; car c'est par le mouvement » seul de la pensée que l'homme est libre et s'appartient. Quiconque » porte en soi l'idée d'une science, ne peut manquer d'apprécier les » choses d'après la manière dont l'intelligence humaine s'y révèle : » de ce point de vue élevé, bien des choses devront lui paraître fu- » tiles, qui peuvent sembler aux autres d'un assez grand prix. On m'a » souvent accusé d'orgueil, et l'on a fait mon plus bel éloge, tout en » voulant m'infliger un blâme, lorsqu'on m'a reproché d'être fier de- » vant tout ce qui est au-dessous de moi, et humble seulement devant » ce qui est au-dessus. Mais l'immense disproportion que l'on découvre, » en les mesurant, entre le monde extérieur et le monde qu'on sent » en soi, empêche toute estime exagérée de soi-même, lorsqu'on a de- » vant les yeux la carrière sans terme et sa propre force bornée. Cette » fierté et cette humilité, je veux toujours m'attacher à les conserver: » je veux même devenir toujours de plus en plus fier et de plus en » plus humble. »

Ce n'était pas pour faire une phrase que Jacobi disait en parlant de lui-même, qu'il estimait les choses d'après la manière dont l'intelligence humaine s'y révèle, et que tout ce qui ne touche pas au monde des idées, il le considérait, sinon avec indifférence, du moins avec calme; et il en a fourni la preuve dans les circonstances les plus difficiles de sa vie. Il donna l'exemple le plus étonnant de ce calme vraiment philosophique, lorsqu'il eut le malheur de perdre tout entière la fortune que son père lui avait laissée en héritage; et cette perte aurait dû lui être d'autant plus sensible que, marié depuis dix ans, il avait à soutenir une nombreuse famille. Ceux qui l'ont vu alors, quand il accourut auprès de sa mère, frappée par un malheur semblable, pour lui apporter ses consolations et ses secours, n'ont pu remarquer dans son humeur le plus léger changement. Il parlait toujours avec le même intérêt des sujets scientifiques, et se plaignait seulement que ce voyage

inattendu l'eût interrompu dans une recherche à laquelle il se livrait alors avec ardeur.

J'ai déjà dit comment le culte de Jacobi pour les idées se montra dans la justice qu'il rendit à la grande découverte d'Abel. Il accueillait avec les mêmes sentiments tout ce qui avait une importance scientifique, et l'on ne peut pas lui appliquer cette sentence d'un ancien auteur, que les hommes n'admirent véritablement que les choses qu'ils croient pouvoir eux-mêmes accomplir. Jacobi se plaisait à reconnaître le mérite intellectuel dans toutes les branches, et il recevait avec d'autant plus de joie une découverte faite par autrui dans sa science d'adoption, que cette découverte, par son cachet original, se distinguait plus de ses propres créations. Son mouvement naturel, en pareil cas, était, pour exprimer plus fortement son approbation, d'ajouter cet aveu, qu'il n'aurait jamais eu cette idée-là.

Il ne me reste plus qu'à compléter en peu de mots ce que j'ai déjà dit plus haut sur les circonstances extérieures de la vie de Jacobi.

Lorsque ses recherches sur les fonctions elliptiques commencèrent à être connues, il était encore professeur privé. L'étonnement que ses découvertes excitèrent chez tous les juges compétents dans cette matière, le fit nommer immédiatement professeur extraordinaire, et bientôt après professeur ordinaire.

En parlant de l'accueil que les découvertes d'Abel et de Jacobi (car ces deux noms sont ici inséparables) trouvèrent chez tous les géomètres, je ne puis oublier l'homme qui, par ses longs travaux, semblait le plus capable d'apprécier toute l'importance de ce progrès inattendu. Legendre, qui s'était plaint si souvent de l'indifférence de ses contemporains, et qui, peu de temps encore avant cette époque, avait exprimé le regret que sa science favorite, négligée par tous les autres géomètres, eût été amenée par lui seul, après quarante ans de travaux, à ce qu'il croyait être la perfection; Legendre salua les découvertes par lesquelles Abel et Jacobi étendaient la théorie bien au delà des limites qui lui semblaient fixées par la nature du sujet, avec une telle chaleur, avec un tel enthousiasme, qu'il est difficile de dire à qui un tel accueil a fait le plus d'honneur, des jeunes mathématiciens qui le recevaient à l'entrée de leur carrière, ou du noble vétéran de la science qui, presque au terme de la sienne, se montrait capable de tels sentiments.

Bientôt après, par une distinction non moins honorable, l'Académie de Paris, quoiqu'elle n'eût point ouvert de concours sur la théorie des fonctions elliptiques, décerna aux travaux d'Abel et de Jacobi, comme à la plus importante découverte du temps, un de ses grands prix pour les sciences mathématiques, qu'elle partagea entre Jacobi et les héritiers d'Abel.

Je dois me borner ici à rapporter les témoignages rendus au mérite de Jacobi à son entrée dans la carrière scientifique. Les limites qui me sont imposées ne me permettent pas d'énumérer les distinctions qui lui furent depuis départies en si grand nombre, et dont la liste trouverait naturellement place dans une biographie détaillée.

Peu de temps après avoir publié, en 1829, ses *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, qui ne renferment qu'une partie de ses recherches sur ce sujet, Jacobi fit son premier grand voyage à l'étranger. Il passa par Gœttingue pour faire la connaissance personnelle de Gauss, et se dirigea ensuite vers Paris, où il resta plusieurs mois. Outre Legendre, avec qui il était depuis longtemps en correspondance intime, et pour qui il a toujours conservé une grande vénération, il y trouva réunis Fourier, Poisson, et d'autres géomètres éminents qui lui ont survécu.

Ayant épousé, en 1831, une femme distinguée par les qualités de l'esprit, Jacobi n'entreprit son second voyage à l'étranger qu'en 1842, en compagnie de sa femme. La circonstance qui y donna lieu est trop honorable pour que je puisse la passer sous silence. L'homme d'État éclairé qui était alors à la tête de l'administration dans la province de Prusse, pensa qu'il était désirable, dans l'intérêt de la science, que Bessel et Jacobi se rendissent à l'invitation qui leur avait été souvent adressée, de prendre part à la réunion scientifique annuelle qui se tient en Angleterre, et il proposa au Roi de faire pour eux les frais du voyage. S. M. daigna accueillir cette demande avec une munificence royale.

Bientôt après son retour de ce voyage, Jacobi éprouva les symptômes d'une maladie malheureusement incurable. On eut longtemps à craindre pour sa vie, et lorsqu'enfin le danger fut pour le moment écarté, ses médecins déclarèrent que le rétablissement de sa santé exigeait un long séjour dans un climat méridional. Cet arrêt médical mit Jacobi dans un grand embarras; mais l'embarras ne dura pas longtemps. L'état

des choses ne fut pas plutôt porté à la connaissance du Roi par notre confrère Alexandre de Humboldt, dont la puissante intercession ne fait jamais défaut lorsqu'il s'agit de l'honneur de la science et de l'intérêt de ses représentants, qu'un nouvel acte de la générosité royale assigna une somme considérable pour le voyage de Jacobi en Italie.

La douceur du climat de Rome, où Jacobi passa l'hiver, exerça sur sa santé une si heureuse influence, que ceux qui le voyaient là, bien loin de reconnaître en lui un convalescent, ne pouvaient s'empêcher d'admirer son activité vraiment prodigieuse. Pendant les cinq mois qu'il passa dans cette ville, non-seulement il écrivit un Mémoire important et volumineux destiné au Journal de Crelle, sans parler de plusieurs petites Notes qui parurent à Rome même dans un journal scientifique, mais encore il entreprit de collationner au Vatican les manuscrits de Diophante, auteur dont il s'était occupé assidûment depuis quelque temps déjà.

De retour dans sa patrie, il fut appelé de Kœnigsberg à Berlin, dont le climat un peu plus doux paraissait moins dangereux pour sa santé. Ici, sans appartenir à l'Université, il avait pour unique obligation de faire des leçons publiques autant que le lui permettraient les ménagements que son état réclamait d'une manière impérieuse. L'activité de sa plume pendant son séjour dans notre ville ne le cédait guère à celle des meilleurs temps de son séjour à Kœnigsberg, et les Mémoires qu'il a écrits dans le cours de six années environ remplissent deux forts volumes in-quarto.

Au commencement de l'année 1851, il fut atteint de la grippe. Un prompt rétablissement, qui lui permit de reprendre ses travaux avec une grande ardeur, rendit à ses amis l'espoir qu'il serait conservé longtemps encore à leur affection et à la science, lorsqu'il retomba subitement malade le 11 février. Son état inspira aussitôt les plus grandes inquiétudes, et lorsqu'on reconnut au bout de quelques jours qu'il était atteint de la petite vérole et que, dans un tempérament miné par son ancien mal, le mal nouveau avait pris un caractère pernicieux, alors tout espoir s'évanouit. Le 18 février, à 11 heures du soir, il expira tranquillement après huit jours de maladie.

La carrière scientifique de Jacobi embrasse juste un quart de siècle; elle a donc été beaucoup plus courte que celle de la plupart des géo-

mètres de premier ordre qui l'ont précédé ; c'est à peine la moitié du temps pendant lequel s'est exercée l'activité d'Euler, avec qui Jacobi présente la plus grande ressemblance, tant par la variété et la fécondité de son génie, que par la singulière faculté d'esprit qui tenait sans cesse à sa disposition tous les procédés de la science.

La mort qui l'a surpris si jeune au milieu de ses travaux, en pleine possession de toutes ses forces, a ravi à la science les grandes richesses qu'elle était encore en droit d'attendre de son ardeur infatigable. Lorsque j'avance ceci, je ne pars pas seulement de la supposition que, dans un pareil génie, les forces créatrices ne puissent s'éteindre qu'avec les forces physiques. J'ai aussi sous les yeux une série de travaux presque achevés, auxquels il eût mis lui-même la dernière main en peu de temps, peut-être dans le cours même de l'impression, comme il le faisait volontiers sur la fin de sa vie, et qui devront maintenant paraître, par les soins de ses amis, sous forme de fragments incomplets. Pendant sa maladie, quatre jours à peine avant sa mort, il déplorait encore la fatalité qui avait pesé sur plusieurs de ses plus grands travaux, interrompus par la maladie ou par des malheurs domestiques. « Lorsque » je me remettais plus tard au travail, » ajoutait-il avec tristesse, « j'ai- » mais mieux commencer quelque sujet nouveau que de reprendre » des recherches qui me rappelaient de si pénibles souvenirs. Mais » je m'aperçois que je ne dois pas tarder plus longtemps à publier » ces anciens travaux auxquels j'ai consacré le meilleur de mes forces, » si je veux qu'ils puissent avoir encore quelque influence sur les pro- » grès de la science. Heureusement il ne me faudra pour cela que très- » peu de temps, et ce peu, je l'espère bien, ne me manquera pas. »

SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

(Deuxième article.)

1. Je conserve toutes les notations dont j'ai fait usage dans le premier article, inséré au cahier d'*Avril* dernier (*voir* page 141). Ainsi, en désignant par m un nombre entier positif, je continue à représenter par $\varphi(m)$ le nombre des entiers premiers à m et non plus grands que m; par $\int m$ la somme des diviseurs de m; par $\zeta(m)$ leur nombre; enfin par $\theta(m)$ le nombre de manières dont m peut se décomposer en deux facteurs premiers entre eux. Je continue aussi à désigner par d un diviseur quelconque de m, et par δ le diviseur correspondant qui donne $m = d\delta$.

Cela étant, j'ajoute d'abord aux formules posées dans le premier article les deux formules suivantes :

$$(a) \qquad \sum \zeta(d^{2\mu}) = \zeta(m)\,\zeta(m^{\mu}),$$

et

$$(b) \qquad \sum \zeta(d^{2\mu})\,\zeta(\delta) = \sum \zeta(d)\,\zeta(d^{\mu}).$$

L'exposant μ est un nombre entier positif quelconque, et le signe $\sum$ s'applique à l'ordinaire à tous les diviseurs d de m, 1 et m compris.

Ainsi, pour $m = 6$ et $\mu = 1$, on doit avoir, d'après la formule (a),

$$\zeta(1) + \zeta(4) + \zeta(9) + \zeta(36) = \zeta(6)^2,$$

c'est-à-dire

$$1 + 3 + 3 + 9 = 4^2 = 16,$$

ce qui est exact.

De même, d'après la formule (b), on doit trouver égales entre elles les deux expressions

$$\zeta(1)\zeta(6)+\zeta(4)\zeta(3)+\zeta(9)\zeta(2)+\zeta(36)\zeta(1),$$

et

$$\zeta(1)^2+\zeta(2)^2+\zeta(3)^2+\zeta(6)^2,$$

dont la valeur commune est en effet 25.

Comme la formule (a) pour $\mu=1$ se réduit à

$$\sum\zeta(d^2)=\zeta(m)^2,$$

et que, d'autre part, on a en vertu d'une formule de notre premier article,

$$\sum\theta(d)\zeta(\delta)=\zeta(m)^2,$$

il faut en conclure que

$$\sum\theta(d)\zeta(\delta)=\sum\zeta(d^2).$$

Après les équations (a) et (b), j'écris celle-ci :

$$(c)\qquad \sum\varphi(\delta)\int d=m\zeta(m).$$

Prenons encore pour exemple le nombre (6). L'équation (c) exige que

$$\varphi(6)\int 1+\varphi(3)\int 2+\varphi(2)\int 3+\varphi(1)\int 6=6\zeta(6),$$

et cela a réellement lieu, car

$$2.1+2.3+1.4+1.12=24=6.4.$$

Citons encore la formule

$$(d)\qquad \sum\delta\int d=\sum d\zeta(d).$$

Ainsi, pour $m=4$,

$$4\int 1+2\int 2+\int 4=17=\zeta(1)+2\zeta(2)+4\zeta(4).$$

2. Introduisons maintenant une fonction numérique nouvelle

$$\lambda(m),$$

dont la valeur soit 1 ou -1, suivant que le nombre total des facteurs premiers, égaux ou inégaux, de m est pair ou impair. En d'autres termes, soit

$$\lambda(1) = 1,$$

et généralement, pour m décomposé en facteurs premiers sous la forme

$$m = a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma,$$

soit

$$\lambda(m) = (-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\gamma}.$$

Cette fonction $\lambda(m)$, prise isolément ou jointe à celles dont il a été question plus haut, donnera lieu à des théorèmes curieux.

On aura, par exemple,

$$(e) \qquad \sum \lambda(d) = 1 \text{ ou } 0,$$

suivant que m est ou non un carré.

Ainsi, pour $m = 4$,

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(4) = 1,$$

et, pour $m = 12$,

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \lambda(4) + \lambda(6) + \lambda(12) = 0.$$

Je rapproche de l'équation (e) une autre équation du même genre

$$(f) \qquad \sum \lambda(d)\theta(d)\zeta(\delta) = 1 \text{ ou } 0,$$

suivant que m est ou non un carré. Le terme simple $\lambda(d)$ de la formule précédente est remplacé par un produit $\lambda(d)\,\theta(d)\,\zeta(\delta)$, sans que la somme relative à toutes les valeurs de d change : cette somme est toujours 1 quand m est un carré, et 0 quand m n'est pas un carré. C'est ce qu'on peut vérifier sur les deux exemples de $m = 3$ et $m = 4$, car on a bien

$$\lambda(1)\theta(1)\zeta(3) + \lambda(3)\theta(3)\zeta(1) = 0,$$

et

$$\lambda(1)\theta(1)\zeta(4)+\lambda(2)\theta(2)\zeta(2)+\lambda(4)\theta(4)\zeta(1)=1.$$

Au contraire, on a toujours 1 pour second membre, quel que soit le nombre m, dans cette autre formule

$$(g)\qquad \sum\lambda(d)\theta(d)\zeta(\delta^2)=1.$$

Exemple : $m=3$; il vient

$$\lambda(1)\theta(1)\zeta(9)+\lambda(3)\theta(3)\zeta(1)=3-2=1.$$

5. La formule (e) ne contient que la seule fonction λ; les formules (f), (g) contiennent au contraire trois fonctions λ, θ, ζ. Voici à présent une équation où il n'entre que λ et θ :

$$(h)\qquad \sum\lambda(d)\theta(d)=\lambda(m).$$

Soit, comme exemple, $m=6$; on devra avoir

$$\lambda(1)\theta(1)+\lambda(2)\theta(2)+\lambda(3)\theta(3)+\lambda(6)\theta(6)=\lambda(6),$$

et en effet cela revient à l'identité

$$1-2-2+4=1.$$

On a encore

$$(i)\qquad \sum\lambda(d)\theta(\delta)=1.$$

Ainsi, pour $m=6$,

$$\lambda(1)\theta(6)+\lambda(2)\theta(3)+\lambda(3)\theta(2)+\lambda(6)\theta(1)=1.$$

Il n'entre également que λ et θ dans la formule singulière qui suit :

$$(j)\qquad \sum\lambda(d)\theta(d)\theta(\delta)=0$$

pour $m>1$, mais $=1$ pour $m=1$.

Que le premier membre de l'équation que je viens d'écrire soit en effet égal à l'unité quand $m=1$, cela est évident de soi. Mais il est bien remarquable que ce premier membre se réduise toujours à zéro pour les autres valeurs de m. Ainsi, quand $m=2$, ce premier membre est

$$\lambda(1)\theta(1)\theta(2)+\lambda(2)\theta(2)\theta(1)=2-2=0;$$

pour $m = 3$, il est de même

$$\lambda(1)\theta(1)\theta(3) + \lambda(3)\theta(3)\theta(1) = 2 - 2 = 0;$$

pour $m = 4$, il devient

$$\lambda(1)\theta(1)\theta(4) + \lambda(2)\theta(2)\theta(2) + \lambda(4)\theta(4)\theta(1),$$

c'est-à-dire

$$2 - 2.2 + 2 = 0.$$

Et ainsi de suite.

4. Il a été question dans notre premier article, et aussi à la fin du cahier de *Mai* (*voir* page 184), de formules concernant des sommes relatives, non plus à tous les diviseurs d de m, mais seulement aux diviseurs carrés D^2 que m peut avoir. Je remarquerai en passant que le nombre des diviseurs carrés dont il s'agit est exprimé par

$$\sum \lambda(d)\zeta(\delta).$$

Soit, par exemple, $m = 16$. On trouve 3 pour valeur de

$$\lambda(1)\zeta(16) + \lambda(2)\zeta(8) + \lambda(4)\zeta(4) + \lambda(8)\zeta(2) + \lambda(16)\zeta(1),$$

et 16 a en effet trois diviseurs carrés 1, 4, 16.

La somme des valeurs inverses des diviseurs dont il s'agit donne lieu à cette autre formule

$$(k) \qquad \sum \lambda(\delta) \int d = m \sum{}' \frac{1}{D^2},$$

où l'on a marqué d'un accent le second $\sum$, qui ne se rapporte qu'aux diviseurs carrés D^2, tandis que le premier s'applique à tous les diviseurs d de m. Pour $m = 8$, par exemple, la formule (k) mène à l'identité

$$\int 8 - \int 4 + \int 2 - \int 1 = 8 + 2.$$

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE DES PÔLES ET POLAIRES DANS LES COURBES D'ORDRE QUELCONQUE, PARTICULIÈREMENT DANS LES COURBES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME ORDRE, COMPRENANT DIVERSES APPLICATIONS DE CETTE THÉORIE;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie des pôles et polaires dans les courbes géométriques.

I.

On sait qu'on nomme *polaire*, dans les courbes du second degré, la ligne droite qui est le lieu géométrique des points qu'on obtient en prenant, sur chaque transversale issue d'un point fixe, le *conjugué harmonique* de ce point par rapport aux deux points de rencontre de la transversale et de la conique. On sait aussi que les points où la polaire coupe la courbe sont précisément les deux points de contact des tangentes issues du point donné.

C'est en généralisant les idées comprises dans ces deux propositions que les géomètres sont parvenus à créer la belle théorie que je vais exposer dans la première partie de ce Mémoire [*].

II.

Soit O un point donné dans le plan d'une conique. Si l'on prend sur chaque transversale issue du point O un point O′ tel, qu'on ait la relation

$$\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right) + \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right) = 0,$$

[*] Plusieurs auteurs ont écrit sur ce sujet. Je suivrai principalement l'excellent ouvrage publié par M. G. Salmon, sous le titre : *A treatise on the higher plane curves: intended as a sequel to a treatise on conic Sections*. Dublin, 1852, in-8°, que M. Chasles a bien voulu me faire connaître. Seulement j'ai cherché, par un mode particulier de

a et b étant les points d'intersection de la transversale et de la courbe, le lieu du point O′ sera la *polaire* du point O.

Si la courbe est du troisième degré, et qu'on prenne pareillement sur chaque transversale, le point O′ tel, qu'on ait

$$\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right) + \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right) + \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oc}\right) = 0,$$

ou, plus brièvement,

$$(1) \qquad \sum \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right) = 0,$$

le lieu du point O′ sera encore une ligne droite.

En effet, l'équation (1), ne contenant la quantité OO′ qu'au premier degré, n'assigne au point O′ qu'une seule position sur chaque transversale. En outre, le point O′ ne peut se confondre avec le point O, qu'on suppose étranger à la courbe [*]; car si cette coïncidence avait lieu, comme OO′ est nul, il faudrait que l'une des distances Oa, Ob ou Oc le fût également; en d'autres termes, il faudrait, contrairement à l'hypothèse, que le point O appartînt à la courbe. Donc le lieu du point O′ est une ligne droite.

Ce mode de démonstration s'applique évidemment à une courbe d'ordre quelconque. Ainsi la propriété qui vient d'être énoncée est vraie pour toutes les courbes géométriques Elle est connue sous le nom de *théorème de Cotes*, et se prouve de bien des manières (voir le *Traité des courbes géométriques* de Maclaurin, la *Géométrie supérieure* de M. Chasles, page 350, ou le Mémoire de M. Poncelet sur l'*Analyse des transversales*).

La ligne droite dont il vient d'être question prend par extension le nom de *droite polaire* du point O par rapport à la courbe.

III.

De même que, pour obtenir la droite polaire, on fait la somme des termes tels que $\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa'}\right)$ égale à zéro, on peut imaginer qu'on rende

---

démonstration, à rendre le sujet tout à fait élémentaire, en l'affranchissant des secours assez nombreux qu'il emprunte à une analyse élevée, dans l'ouvrage anglais.

[*] Le cas où le point O est sur la courbe est examiné plus loin (V).

nulle la somme des produits de ces mêmes termes pris deux à deux. On obtient ainsi, dans le cas où la courbe donnée est du troisième ordre, la relation

$$\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)+\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oc}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oc}\right)=0,$$

ou, plus simplement,

$$(2)\qquad \sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)=0.$$

Le lieu du point O′, que cette équation détermine, est évidemment une conique. Car l'équation ne contenant OO′ qu'au second degré, n'assigne au point O′ que deux positions sur chaque transversale, et d'ailleurs, par la même raison que ci-dessus, le point O′ ne peut jamais coïncider avec le point O tant que ce point est étranger à la courbe.

Il est clair que le raisonnement subsiste, quel que soit le degré de la courbe donnée.

Donc c'est une propriété générale des courbes géométriques, que le lieu du point O′ déterminé par l'équation (2) est une conique.

Cette conique a reçu par analogie le nom de *conique polaire* du point O par rapport à la courbe.

IV.

On voit encore, sans plus de détails, que si l'on égale à zéro la somme des produits des termes $\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)$ pris trois à trois, quatre à quatre,..., m à m, ce qui s'exprime par les équations

$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oc}\right)=0,$$
$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oc}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Od}\right)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)\cdots\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Om}\right)=0,$$

le lieu du point O′, que chacune d'elles détermine, est une courbe du troisième, du quatrième,..., ou du $m^{ième}$ degré.

On obtient ainsi un nombre indéfini de théorèmes analogues à celui de Cotes.

Ces différentes courbes ont aussi reçu le nom de *courbes polaires* du point O par rapport à la courbe donnée.

V.

Le cas où le point O appartient à la courbe mérite un examen particulier.

Supposons toujours, dans le but d'abréger les développements (ce qui n'ôte rien ici à la généralité du raisonnement), que la courbe donnée soit du troisième ordre.

L'équation (1) du § II donne

$$O'a.Ob.Oc + O'b.Oa.Oc + O'c.Ob.Oa = 0,$$

et si le point O est en a sur la courbe, elle se réduit à son premier terme

$$O'O.Ob.Oc = 0.$$

Donc $O'O = 0$ tant que Ob ou Oc ne sont pas nuls, c'est-à-dire que la droite polaire du point O passe par ce point lui-même. Mais si l'on prend pour la transversale la tangente en O à la courbe donnée, Ob ou Oc deviennent infiniment petits, et par suite $O'O$ a une valeur indéterminée; en d'autres termes, tous les points de la tangente peuvent être pris indistinctement pour le point O′, et par conséquent la *droite polaire* d'un *point simple* d'une courbe donnée est la tangente à la courbe en ce point [*].

VI.

Dans la même hypothèse, l'équation (2) du § III devient

$$O'O(O'b.Oc + O'c.Ob) = 0,$$

[*] Il est aisé de voir que sa direction est indéterminée si le point O est *double*.

et l'on voit qu'elle est satisfaite par la valeur $O'O = 0$ et par

$$\frac{O'b}{Ob} : \frac{O'c}{Oc} = -1,$$

ce qui prouve que la *conique polaire* passe par le point O, et que tous ses points sont les conjugués harmoniques du point O par rapport aux deux points de rencontre de la courbe et de chaque transversale issue du point O.

Supposons la transversale tangente en O à la courbe donnée; le point b est infiniment voisin de O; donc O', conjugué harmonique de O par rapport à b et c, est lui-même infiniment voisin de O dans la direction de la tangente : ce qui prouve que la conique polaire d'une courbe du troisième degré, relative à un point de cette courbe, touche la courbe en ce point [*].

Cette propriété s'étend évidemment aux coniques polaires d'une courbe géométrique quelconque, et même à ses courbes polaires de tous les degrés. Qu'il s'agisse, par exemple, de la *cubique* [**] *polaire* d'une courbe du quatrième ordre; l'équation qui la caractérise, savoir

$$\sum \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oc}\right) = 0,$$

donne, par le développement,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &O'a.O'b.O'c.Od + O'a.O'c.O'd.Ob + O'a.O'b.O'd.Oc \\ &\qquad + O'b.O'c.O'd.Oa = 0, \end{aligned}\right.$$

et elle devient, quand le point donné O coïncide avec un point a de la courbe,

$$O'O.O'b(O'c.Od + O'd.Oc) + O'O.O'c.O'd.Ob = 0,$$

d'où l'on voit : 1° que la *cubique* passe par le point O, puisque

[*] Il est facile de voir que si le point O est un *point double*, la conique polaire n'est autre que le système des deux tangentes en ce point.

[**] Cette expression, pour désigner une courbe du troisième ordre, a été proposée et employée par M. G. Salmon, et semble très-convenable.

$O'O = 0$ satisfait à l'équation, et 2° qu'elle touche la courbe donnée en ce point; car si la transversale est tangente à la courbe en O, le terme $O'O.O'c.O'd.Ob$ disparaît à cause de $Ob = 0$, et par suite on a

$$O'b = 0 \quad \text{et} \quad \frac{O'c}{Oc} \cdot \frac{O'd}{Od} = -1;$$

ce qui veut dire que la cubique a elle-même pour tangente en O la tangente de la courbe du quatrième ordre, et que le troisième point qui lui appartient sur cette tangente est conjugué harmonique du point O par rapport aux deux points c et d où cette tangente rencontre de nouveau la courbe donnée.

La même démonstration s'appliquerait sans aucune difficulté à toutes les courbes polaires d'une courbe donnée. Donc :

Les différentes courbes polaires d'une courbe quelconque, relatives à un point simple de cette courbe, la touchent en ce point.

VII.

Supposons que le point O soit situé à l'infini dans une direction L, la droite polaire devient le *diamètre* de la courbe conjugué à cette direction, et chacune des autres polaires devient une *courbe diamétrale*, ou, suivant l'expression employée par Cramer, un *diamètre curviligne* conjugué à la direction donnée. Cette droite et ces courbes correspondent aux équations

$$\sum (O'a) = 0, \quad \sum (O'a.O'b) = 0,$$

$$\sum (O'a.O'b.O'c) = 0, \ldots, \quad \sum (O'a.O'b \ldots O'm) = 0;$$

mais je n'entrerai pas ici dans ce détail qui est étranger à l'objet que j'ai en vue.

VIII.

Si la courbe donnée est une courbe du troisième degré à *point double*, sa conique polaire passe une fois par ce point, quelle que soit la posi-

tion du point donné O [*]. En effet l'équation (2) du § III devient, à cause de la coïncidence des deux points a et b,

$$O'a\,(O'a.Oc + 2\,O'c.Oa) = 0,$$

et elle est satisfaite par la valeur $O'a = 0$; ce qui prouve que la conique passe par le point double a; la seconde position du point O' sur la transversale Oa est donnée par l'équation

$$\frac{O'a}{Oa} : \frac{O'c}{Oc} = -2.$$

Si la courbe donnée est du quatrième degré avec un *point triple* en a, l'équation (3) du § VI devient simplement

$$\overline{O'a}^2\,(O'a.Od + 3\,O'd.Oa) = 0.$$

Donc la *cubique polaire* d'un point quelconque O passe deux fois par le point triple a, et son rayon vecteur sur la transversale Oa est donné par la relation

$$\frac{O'a}{Oa} : \frac{O'd}{Od} = -3.$$

On verrait sans peine que, dans la même hypothèse, la *conique polaire* de la courbe du quatrième ordre passe une seule fois par le point triple.

IX.

Les courbes polaires se classent comme il suit d'après leur degré. La *première polaire* d'une courbe de degré m est du degré $m - 1$; sa *seconde polaire* est du degré $m - 2$, et ainsi de suite; de sorte que sa $(m - 1)^{ième}$ *polaire* n'est autre chose que sa *droite polaire*.

On peut donc généraliser ainsi le théorème du § VIII :

Si une courbe du degré m *a un point multiple de l'ordre* p, *sa première polaire relative à un point donné quelconque passe par le point*

[*] Si le point O est un point double, la conique polaire dégénère en deux droites (VI).

multiple et y est douée d'un point multiple de l'ordre $p-1$; *la seconde polaire y possède un point multiple de l'ordre* $p-2$, *et enfin sa* $(p-1)^{ième}$ *polaire n'y passe qu'une seule fois.*

La démonstration de ce théorème se fait exactement comme au § VIII.

X.

La conique polaire d'un point O, par rapport à une courbe donnée du troisième degré, *est aussi le lieu géométrique des* pôles *de toutes les droites qui passent par le point* O.

En effet, soit O′ un point quelconque de cette conique. Il suffit de prouver qu'on a la relation

$$\sum\left(\frac{1}{O'O}-\frac{1}{O'a}\right)=0.$$

Donc, en développant et rapportant l'origine des segments au point O par la relation

$$O'O+Oa+aO'=0,$$

il s'agit de prouver que l'équation

$$\overline{OO'}^2(Oa+Ob+Oc)-OO'[Oa(Ob+Oc)+Ob(Oa+Oc)+Oc(Oa+Ob)]$$
$$+3.Oa.Ob.Oc=0$$

est une conséquence de celle-ci qui est donnée,

$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)=0.$$

Or c'est ce qui a lieu effectivement, comme il est aisé de le vérifier.

Ce théorème important s'applique comme il suit à une courbe quelconque :

La première polaire *d'une courbe de degré* m, *relative à un point fixe* O, *est aussi le lieu géométrique des* pôles *de toutes les droites qui passent par ce point ;*

Et il se démontre, comme dans le cas de la courbe du troisième or-

dre, en prouvant, par une simple vérification, que si la relation

$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)\cdots\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Om}\right)=0$$

a lieu entre les deux points O et O′, cette autre équation

$$\sum\left(\frac{1}{O'O}-\frac{1}{O'a}\right)=0$$

en est une conséquence.

XI.

D'après cela, soit L une droite quelconque donnée dans le plan d'une courbe de degré m, et soient O, P deux points de cette droite. La *première polaire* du point O contient les pôles de la droite L, et pareillement celle du point P. Or ces deux courbes du degré $(m-1)$ se coupent en $(m-1)^2$ points. Donc *une droite a* $(m-1)^2$ pôles *relatifs à une courbe du degré* m.

Par exemple, si la courbe est du troisième ordre, une droite quelconque a quatre pôles; et si c'est une conique, elle n'en a qu'un seul, comme on le sait depuis longtemps.

On peut remarquer que toutes les *premières polaires* des points d'une droite, prises par rapport à une courbe donnée, forment un faisceau *anharmonique* à la division que décrivent sur cette droite les pôles qui leur correspondent un à une.

XII.

Il existe entre les différentes courbes polaires d'un même point un lien plus intime qui en fait pour ainsi dire une véritable famille, et qui est basé sur la propriété suivante :

Toute courbe polaire d'un point fixe, prise par rapport à une courbe donnée, est aussi la polaire du point fixe par rapport à toutes les autres courbes polaires de ce point qui la précèdent dans la hiérarchie.

Ainsi la conique polaire d'un point, prise par rapport à une courbe du quatrième ordre, est en même temps la conique polaire de ce point relativement à la cubique polaire de ce même point prise par rapport à la courbe donnée.

Cette propriété remarquable résulte de la manière dont s'engendrent les polaires successives.

Je vais la démontrer dans le cas de l'exemple précité de la courbe du quatrième ordre. Les deux valeurs de OO′ qui répondent à une transversale quelconque $Oabcd$, sont les racines de l'équation du second degré

$$(A)\left\{\begin{aligned} &\overline{OO'}^2(Oa.Ob+Oa.Oc+Oa.Od+Ob.Oc+Ob.Od+Oc.Od)\\ &-3OO'(Oa.Ob.Oc+Oa.Ob.Od+Oa.Oc.Od+Ob.Oc.Od)\\ &+6Oa.Ob.Oc.Od=0,\end{aligned}\right.$$

laquelle résulte du développement de

$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)=0.$$

Soient $O\omega$, $O\omega_1$, $O\omega_2$ les trois valeurs du rayon vecteur de la cubique polaire du point O sur la même transversale. Les deux valeurs du rayon vecteur de la conique polaire de cette courbe du troisième ordre seront les racines de l'équation du second degré

$$\begin{aligned}\overline{OP}^2(O\omega+O\omega_1+O\omega_2)-2\,OP(O\omega.O\omega_1+O\omega.O\omega_2+O\omega_1.O\omega_2)\\ +3(O\omega.O\omega_1.O\omega_2)=0.\end{aligned}$$

Or, si l'on remplace dans cette équation les coefficients par leurs valeurs tirées de l'équation

$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oc}\right)=0,$$

qui est relative à la cubique polaire, on obtient une équation identique à l'équation (A). Donc les valeurs de OO′ et de OP sont les mêmes, et les deux coniques polaires se confondent. Ce qu'il s'agissait de démontrer.

Cette démonstration s'applique d'elle-même au cas général. Elle consiste dans une simple vérification, laborieuse mais facile, puisqu'elle n'exige pas la détermination même des racines des équations successives qui donnent les valeurs des rayons vecteurs des différentes polaires

(racines telles que $O\omega$, $O\omega_1$, $O\omega_2$ dans l'exemple précédent), mais simplement la connaissance des produits de ces racines prises une à une, deux à deux,..., m à m, produits qui sont immédiatement donnés par les coefficients de ces diverses équations.

XIII.

La construction des polaires, dans les courbes du troisième et du quatrième degré, peut s'effectuer sans que ces courbes soient tracées, puisqu'elle se réduit en définitive à mener par le pôle donné un certain nombre de transversales; à déterminer leurs points d'intersection respectifs avec les courbes, ce qu'on sait faire, lors même que ces courbes sont seulement déterminées par le nombre de points nécessaires à leur construction, et enfin à porter sur ces transversales les valeurs fournies par les racines de certaines équations qui s'élèvent au plus au troisième degré.

XIV.

Supposons en premier lieu qu'il s'agisse de la droite polaire d'une courbe du troisième ordre relative à un point donné O. Deux points suffisent pour déterminer cette droite. Donc si, par le point O, on mène deux transversales $Oabc$, $Oa'b'c'$ qui rencontrent respectivement la courbe en a, b, c et a', b', c', la droite cherchée sera aussi la polaire du point O par rapport à toutes les courbes du troisième ordre passant par ces six points, et par conséquent ce sera la *polaire* du point O par rapport au triangle formé par les trois droites aa', bb', cc', triangle qui est l'une de ces courbes. Cette polaire pourra donc se construire avec la règle dès que les points a, b, c, a', b', c' seront connus.

Si les deux transversales sont infiniment voisines, le triangle, par rapport auquel on doit construire la *droite polaire*, devient le triangle formé par les tangentes en a, b et c.

Supposons encore que les deux transversales infiniment voisines et le point O soient à l'infini; les droites aa', bb', cc' sont les asymptotes de la courbe; la droite polaire devient un *diamètre*. Donc le diamètre d'une courbe du troisième ordre, qui est conjugué à une direction donnée, n'est autre que le *diamètre* (conjugué à cette direction) du triangle *asymptotique* de la courbe.

XV.

Cinq points déterminent une conique. Donc il suffira de trois transversales issues du point O pour déterminer sa conique polaire par rapport à une courbe donnée du troisième ordre, puisque chacune de ces transversales donne lieu à deux points de la conique. Soient a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' les points d'intersection de la courbe par ces trois droites respectivement. Si les trois points a, a', a'' sont choisis en ligne droite, les six autres sont, comme on sait, situés sur une même conique S. La conique polaire cherchée, étant la même par rapport à toutes les courbes du troisième ordre qui passent par les neuf points, pourra donc se construire relativement au systeme de la droite aa''' et de la conique S, lequel représente une de ces courbes du troisième ordre. Etc.

SECONDE PARTIE.

Construction des tangentes aux courbes géométriques, menées par un point extérieur, et particulièrement aux courbes du troisième et du quatrième degré.

XVI.

La construction des tangentes menées aux courbes géométriques par un point extérieur, est une conséquence très-simple de la théorie qui vient d'être exposée. Elle repose sur le théorème suivant :

Les points de contact des tangentes menées à une courbe géométrique par un point donné sont les points où cette courbe est rencontrée par sa première polaire *relative au point donné.*

En effet, chacun de ces points d'intersection a pour droite polaire la tangente à la courbe en ce point, parce qu'il appartient à la courbe donnée (V); et cette tangente passe par le point donné parce que son point de contact appartient à la première polaire du point fixe (X). Donc :

1°. Par un point donné, on peut mener à une courbe géométrique

de degré m, qui n'a pas de *points multiples*, $m(m-1)$ tangentes réelles ou imaginaires, puisque cette courbe et sa première polaire, qui est du degré $(m-1)$, se coupent en $m(m-1)$ points réels ou imaginaires.

2°. Si la courbe donnée a n points doubles, sa première polaire passe une fois par chacun de ces points (VIII et IX). Le nombre des intersections de ces deux courbes est donc réduit à $m(m-1)-2n$, et par conséquent on n'a dans ce cas que $m(m-1)-2n$ tangentes issues du point donné, auxquelles il faut joindre les n droites qui le joignent aux points doubles, et dont chacune représente deux véritables tangentes superposées.

XVII.

Plus généralement, si la courbe du degré m a n points multiples de l'ordre α, p points multiples de l'ordre β, etc., sa première polaire aura (IX) n points multiples de l'ordre $\alpha-1$, p points multiples de l'ordre $\beta-1$, etc., et par conséquent le nombre des intersections distinctes des deux courbes sera, abstraction faite de celles qui ont lieu en ces points multiples,

$$m(m-1)-[n.\alpha(\alpha-1)+p.\beta(\beta-1)+\ldots],$$

et ce sera aussi le nombre des tangentes qu'on pourra mener à la courbe par un point quelconque donné.

Par exemple, si une courbe du cinquième ordre a un point triple et trois points doubles ordinaires, on ne pourra lui mener par un point extérieur que huit tangentes au lieu de vingt, et cette courbe sera simplement de *huitième classe*. La droite qui joint le point donné au point triple représente ici six tangentes superposées, et chacune des droites qui le joignent aux points doubles en représente deux.

XVIII.

Le problème de mener des tangentes, par un point donné, à une courbe du troisième ordre se réduit donc à construire la conique polaire de la courbe relative à ce point (XVI), et comme la question comporte six solutions, il sera nécessaire de tracer entièrement les deux courbes pour avoir leurs six points d'intersection, qui sont les points de

contact des tangentes cherchées. Mais si l'on connaît deux de ces points de contact, il sera inutile de tracer la courbe du troisième ordre, dont il suffira qu'on connaisse neuf points, parce qu'on sait trouver, par de simples intersections de coniques, les quatre autres points de rencontre d'une courbe du troisième ordre et d'une conique qui passe par deux points connus de cette courbe (CHASLES, *Note sur les courbes du troisième ordre. — Comptes rendus de l'Académie*, tome XLI). Il en est de même quand le point donné est sur la courbe; car la tangente à la courbe en ce point, qui en représente deux, peut se déterminer séparément. M. Chasles a traité ce cas particulier dans la *Note* précitée.

XIX.

Si la courbe donnée W est du quatrième ordre, sa cubique polaire, qui passe par les douze points de contact des douze tangentes issues du point O, se déterminera, comme il a été dit au § XV, au moyen de trois transversales dont les points de rencontre avec la courbe W pourront s'obtenir sans que la courbe soit décrite [*]. Mais il sera nécessaire de tracer les deux courbes si l'on veut obtenir les douze points de contact eux-mêmes.

Dans le cas où l'on connaîtrait *à priori* sept de ces points de contact, on pourrait, sans tracer aucune courbe, déterminer la conique sur laquelle se trouvent les cinq autres. J'ai donné la solution de cette question dans un précédent article du *Journal de Mathématiques*, 2e série, tome Ier; 1856. Mais comme ce problème offre de l'intérêt sous d'autres rapports, je vais en indiquer une solution entièrement différente de la première.

XX.

Je suppose donc que l'on demande :

Etant donnés huit points a, b, c, d, e, f, g, O *dans un même plan, de déterminer la conique* S *sur laquelle se trouvent les cinq autres points de contact des tangentes menées par le point* O *à la courbe du*

[*] La construction de ces points est une conséquence directe du mode de description de la courbe du quatrième ordre, déterminée par quatorze points. Voir le *Journal de Mathématiques*, 2e série, tome Ier; 1856.

quatrième ordre W, *qui est déterminée par la double condition de passer par les sept points* a, b, c, d, e, f, g, *et d'avoir pour tangentes en ces points les droites qui les joignent au point* O *respectivement.*

Il faut d'abord déterminer deux *faisceaux générateurs* de la courbe W. Pour cela, soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les sept points situés infiniment près des points a, b, c, d, e, f, g, dans les directions aO, bO, cO, etc., respectivement. On peut dire que la courbe W est déterminée par les quatorze points a, b, c, d, e, f, g, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

On prendra pour faisceaux générateurs, au lieu de deux faisceaux de coniques, un faisceau de courbes du troisième ordre et un faisceau de droites, savoir

$$(A) \qquad (abcdefg\,x)\ [1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7],$$

et

$$(B) \qquad y\ [1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7),$$

x et y étant deux points inconnus qui doivent satisfaire à la condition de rendre les deux faisceaux *anharmoniques;* question complétement déterminée, ainsi que je le démontre ailleurs, parce que le nombre des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 qui forment la *partie variable* commune aux deux faisceaux, excède de trois le double du nombre des points inconnus x, y.

Pour ne pas interrompre le cours des idées, je supposerai ces deux points trouvés (voir la solution de ce nouveau problème dans la Note annexée au présent Mémoire).

Soit U la cubique polaire du point O par rapport à la courbe W. On sait déjà qu'elle passe par les sept points a, b, c, d, e, f, g, puisque, par construction, les droites Oa, Ob, etc., touchent la courbe W en ces points eux-mêmes. Soient i et l deux autres points qui achèvent de déterminer la courbe U, et qu'on trouvera par le moyen indiqué au § XV.

Soient enfin α, β, γ, δ, ε les cinq autres points de contact inconnus. Il s'agit de déterminer la conique S, sur laquelle ils se trouvent, sans tracer les courbes U et W.

Appelons U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 les cinq cubiques inconnues du faisceau (A), qui passent respectivement par les cinq points cherchés.

Elles *correspondent anharmoniquement* aux rayons générateurs $y\alpha$, $y\beta$, $y\gamma$, $y\delta$, $y\varepsilon$.

De plus, ces cinq cubiques ayant sept points communs avec la courbe U, déterminent dans celle-ci cinq cordes qui passent respectivement par les points α, β, γ, δ, ε, et qui vont toutes concourir en un même point O′ de la courbe U (voir Chasles, *Note* précitée); ces cordes, elles aussi, *correspondent* anharmoniquement aux cinq cubiques.

Donc les deux faisceaux de droites

$$O'[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon],$$
$$y[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon],$$

sont homographiques, et par conséquent ils engendrent par leurs intersections mutuelles la conique cherchée S.

On connaît déjà le point y. On déterminera trois cordes $O'm$, $O'n$, $O'p$ suivant lesquelles trois cubiques du faisceau (A) coupent U. Ces cordes et les rayons ym, yn, yp, qui leur correspondent dans le faisceau (B), détermineront complétement les deux faisceaux générateurs de la conique S.

Ainsi la question est résolue.

XXI.

Dans le cas où les courbes données ont des points multiples, la solution générale devient plus simple. Par exemple, si l'on demande de mener, par un point fixe O, toutes les tangentes possibles à une courbe à point double du troisième ordre, on voit tout de suite que ces tangentes ne sont qu'au nombre de quatre [*] (VIII), et que leurs points de contact sont situés sur une conique qui passe par le point double. On déterminera cette conique ainsi qu'il a été expliqué au § XV, et l'on cherchera ses quatre points d'intersection avec la courbe donnée; problème dont M. Chasles a donné une belle solution dans la *Note* déjà citée (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XLI).

[*] Si le point double était un point de rebroussement, la conique polaire aurait pour tangente en ce point la tangente même qui est commune aux deux branches de la courbe, et le nombre des tangentes issues de O serait réduit à trois.

XXII.

Si la courbe donnée est du quatrième ordre et est douée d'un *point triple d'intersection*, on ne peut lui mener que six tangentes par un point donné O (XVII). Donc si l'on connaît *à priori* deux de ces six tangentes, les quatre autres pourront se déterminer sans qu'on ait besoin de tracer la courbe ni sa première polaire; et il en serait encore de même si le point donné faisait partie de la courbe, car, dans cette dernière hypothèse, il n'existe que quatre tangentes issues du point O, abstraction faite de celle que la courbe a en ce point, tangente qui se détermine séparément et qui en représente deux superposées.

Soient a le point triple donné, b, c, d, e, f, g, O les sept autres points qui, avec la droite L, tangente de la courbe au point O, déterminent une courbe du quatrième ordre W. Désignons par i le point de L qui est infiniment voisin du point O.

La courbe W est la *résultante* des deux faisceaux anharmoniques

$$(A) \qquad (\dot{a}bcd\,O\,i)\ [e,\ f,\ g],$$

$$(B) \qquad a \qquad [e,\ f,\ g],$$

dont l'un (A) se compose de courbes du troisième ordre, ayant chacune un point double en $\dot{a}$ [*] et touchant en O la droite L, et dont l'autre (B) est simplement un faisceau de droites issues du point a.

La cubique polaire U de la courbe W, relative au point O, passe par le point a et y a un point double (IX); elle touche la droite L et la courbe W au point O (VI), et par conséquent elle ne rencontre plus cette courbe qu'en quatre points, qui sont précisément les points de contact des tangentes cherchées. Les courbes U et W ont huit points communs connus *à priori*, savoir six au point a et deux au point O. Il sera donc facile, d'après ce qui précède (XX), de déterminer leurs quatre autres points d'intersection au moyen de deux coniques S et S', et sans être obligé de tracer aucune courbe d'un ordre supérieur.

On pourrait multiplier ces exemples en examinant les cas où la courbe donnée est du quatrième degré à points doubles, ou du cinquième avec un point triple et des points doubles. Mais ceux qui pré-

[*] Le point placé sur l'a signifie que le point a est un point double.

cèdent indiquent suffisamment quelle serait la solution du probleme, toutes les fois que le nombre des tangentes qui resteraient à déterminer n'excéderait pas quatre, et je ne m'y arrêterai pas plus longtemps.

XXIII.

Je terminerai ce Mémoire par une proposition que je suis sans doute peu autorisé à faire, mais qui me semble avoir quelque utilité. Ce serait de désigner les points qui, sur chaque transversale issue d'un point O, appartiennent à la conique polaire, à la cubique polaire, etc., de ce point par rapport à la courbe, par les dénominations respectives de *deuxième centre harmonique*, *troisième centre harmonique*, *etc.*, par une extension naturelle de celle que l'usage a consacrée dans le cas où ce point appartient à la *droite polaire* du point O, ou plutôt encore par celles de *centre harmonique du second*, du *troisième*, du *quatrième ordre*, et ainsi de suite. Ces noms, suffisamment précis, abrégeraient le discours, ce qui est toujours un avantage.

Par exemple, le point O′ qui résulte, sur une transversale OL, de l'équation

$$\sum\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Ob}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Oc}\right)\left(\frac{1}{OO'}-\frac{1}{Od}\right)=0,$$

serait le *quatrième harmonique*, ou le *centre harmonique du quatrième ordre* du point fixe O par rapport à la courbe, sur cette transversale.

Et l'on aurait des dénominations analogues pour les droites qui remplacent ces points dans la théorie corrélative, qu'on déduit facilement, par voie de dualité, de celle qui vient d'être exposée; théorie aussi étendue et aussi importante, où les courbes géométriques sont rangées par ordre de *classes* et non plus relativement à leur degré. Au lieu de *centres harmoniques* relatifs à un point fixe, on aurait des *axes harmoniques* du *premier*, du *deuxième*, du *troisième ordre*, *etc.*, lesquels enveloppent respectivement, comme on sait, un point, une conique, une courbe de troisième classe, etc.; et ce point et ces courbes pourraient s'appeler le *pôle harmonique* et les *courbes polaires enveloppes* de la courbe donnée relativement à la droite fixe.

NOTE

RELATIVE AU § XX DU MÉMOIRE QUI PRÉCÈDE.

DEUXIÈME MODE DE DESCRIPTION DE LA COURBE DU QUATRIÈME ORDRE DÉTERMINÉE PAR QUATORZE POINTS;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Je vais maintenant indiquer le moyen de déterminer les deux points x et y, dont il est question au § XX du Mémoire qui précède. Ces points doivent, comme je l'ai dit, être tels, que les deux faisceaux

(A) $(abcdefg\,x)\ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$,

(B) $y\ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$,

soient *anharmoniques*. Le faisceau (A) est un faisceau de courbes du troisième ordre, qui ont sept points communs connus *à priori*, et qu'on doit assujettir à passer par un même huitième point x; mais quand cette condition sera remplie, ces courbes auront aussi en commun un neuvième point z; ce sont donc, par le fait, trois points x, y et z que je vais déterminer.

Dans la circonstance présente, les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sont infiniment voisins des sept autres points donnés, ce qui veut dire que chacune des cubiques composantes, telles que $(abcdefgx\ 1)$, est tangente en a à une droite donnée Oa. Mais comme la solution est la même, avec plus de généralité, quand ces points sont quelconques, c'est ce dernier cas que j'examinerai ici, en faisant remarquer que le problème dont il s'agit n'est autre chose que celui de décrire la courbe du quatrième ordre qui est déterminée par quatorze points donnés.

Menons par le point a une droite quelconque L; les sept courbes du faisceau (A) couperont L, chacune en deux points autres que a: les sept segments seront en involution, parce que les sept courbes passent par les huit mêmes points [*], et ils correspondront anharmoniquement aux sept cubiques.

[*] CHASLES. — *Principe de correspondance anharmonique.*

Cela posé, imaginons que par les huit points a, b, c, d, e, f, g, 1, on fasse passer une série de cubiques U_1, U'_1, U''_1, etc.; elles marqueront aussi sur L une série de segments en involution, que je désigne par (u_1). Il est évident que le segment inconnu, intercepté par la cubique $(abcdefg\,x\,1)$ sur L, fait partie de la série (u_1). Pareillement, que par les huit points a, b, c, d, e, f, g, 2, on fasse passer une série de cubiques U_2, U'_2, U''_2, etc.; on aura sur L une deuxième série de segments en involution que j'appelle (u_2), et dont fait partie le segment inconnu qu'y détermine la cubique $(abcdefg\,2\,x)$. Enfin chacune des cinq autres séries de cubiques qu'on obtiendra en adjoignant aux sept points a, b, c, d, e, f, g l'un des cinq points restants 3, 4, 5, 6, 7, déterminera sur L une série de segments en involution. J'appelle ces cinq séries (u_3), (u_4), (u_5), (u_6), (u_7), et je remarque que chacune d'elles contient le segment inconnu que marque sur L la cubique inconnue du faisceau (A) qui passe par le même point 3, ou 4, ou etc., duquel cette série résulte. Les séries de segments (u_1), (u_2), (u_3), etc., sont faciles à déterminer. Il suffit, pour chacune d'elles, de deux courbes quelconques U_1, U'_1, puisque deux segments déterminent une involution, et ces deux segments eux-mêmes se construiront avec la ligne droite et le cercle, sans qu'on ait besoin de tracer les courbes U_1, U'_1.

D'après cela, la question est ramenée à celle-ci :

« Étant donné sept séries distinctes de segments en involution sur » une droite et sept points quelconques dans le même plan, 1, 2, 3, 4, » 5, 6, 7, on demande de trouver sept segments, appartenant aux sept » séries respectivement, et un point tels, que les sept segments soient » en involution entre eux, et qu'ils correspondent anharmoniquement » aux sept droites qui joignent le point trouvé aux sept points don- » nés. »

Il est clair que ce problème contient la solution de celui qui est proposé; car, dès qu'on connaîtra deux segments mm', nn' satisfaisant à la condition précédente, il suffira de chercher les deux points d'intersection des courbes du troisième ordre $(abcdefg\,1\,mm')$ et $(abcdefg\,2\,nn')$; ces deux points x et z seront les deux points inconnus du faisceau (A).

Le problème que je viens d'énoncer est déjà plus simple que l'autre; mais il faut le simplifier encore.

Pour cela, soit C un cercle quelconque tracé dans le plan de la fi-

gure, et P un point de ce cercle. Les segments de la série en involution (u_1) sont vus du point P sous des angles dont les côtés interceptent dans le cercle des cordes concourant toutes en un même point α (*Géom. supér.*, n° **700**), et correspondant anharmoniquement aux segments eux-mêmes; d'ailleurs la corde qui correspond au segment inconnu que marque sur L la cubique $(abcdefgxz\,1)$ passe aussi par ce pôle α. Chacune des autres séries (u_2), (u_3), etc., donne lieu pareillement à un pôle β, γ, etc. Ainsi on aura sept pôles α, β, γ, δ, ε, φ, η, et si l'on peut déterminer deux points ξ et y tels, que les deux faisceaux de droites

$$\xi\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \varphi,\ \eta),$$
$$y\,(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7],$$

soient homographiques, la question sera résolue. Car si l'on mène la droite $\xi\alpha$, et qu'on projette du point P sur L la corde qu'elle détermine dans le cercle C, cette projection sera précisément le premier segment cherché mm'; et la projection de la corde déterminée dans le cercle par le rayon $\xi\beta$ fera connaître le second segment nn', qui suffit avec mm' pour donner la solution de la question.

Cette question est donc ramenée à la suivante :

« Étant donnés sur un plan deux systèmes de sept points a, b, c, d, » e, f, g et a', b', c', d', e', f', g', trouver deux points P et P′ tels, que » les deux faisceaux de droites

$$\mathrm{P}\ [a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g\,],$$
$$\mathrm{P}'\,[a',\ b',\ c'\ d',\ e',\ f',\ g'],$$

» soient homographiques. »

La question est déterminée parce qu'elle comporte quatre conditions, savoir, que les quatre rapports anharmoniques

$$\mathrm{P}\,(abcd),\qquad \mathrm{P}\,(abce),\qquad \mathrm{P}\,(abcf),\qquad \mathrm{P}\,(abcg),$$

soient égaux respectivement aux quatre rapports

$$\mathrm{P}'\,(a'\,b'\,c'\,d'),\ \mathrm{P}'\,(a'\,b'\,c'\,e'),\ \mathrm{P}'\,(a'\,b'\,c'\,f'),\ \mathrm{P}'\,(a'\,b'\,c'\,g'),$$

et qu'il faut précisément quatre *éléments* pour déterminer deux points,

par exemple leurs distances à deux axes fixes, telles que leurs coordonnées x et y.

Par conséquent, pour le cas où l'on n'aurait que deux systèmes de six points au lieu de sept, ce qui ne comporte que trois conditions, la question est indéterminée. On ne peut pas prendre arbitrairement un point P; toutefois une infinité satisferont à la question. Il s'agit de déterminer leur lieu géométrique.

Cette courbe passe par les six points a, b, c, d, e, f, et n'a pas de points doubles en ces points. Car si l'on suppose le point P en a par exemple, et qu'on détermine le point P′ tel, que le faisceau P′ $(b'c'd'e'f')$ soit homographique au faisceau P $(bcdef)$, lequel point a toujours une position et une seule; comme la direction de la droite Pa est indéterminée, on peut dire que le faisceau P $(abcdef)$ est homographique au faisceau P′ $(a'b'c'd'e'f')$. Ce qui prouve que la courbe cherchée passe par le point P qui est ici le point a; et elle n'y passe qu'une fois, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de point double en ce point, parce qu'il n'existe qu'une position correspondante du point P′.

Cela posé, je vais démontrer qu'une conique quelconque C, menée par les quatre points a, b, c, d ne peut rencontrer la courbe cherchée qu'en deux points, ce qui prouvera que cette courbe est du troisième ordre.

Soit C′ la conique homographique passant par les quatre points a', b', c', d'. Deux points fixes O, O′, pris sur ces deux coniques respectivement, donnent lieu à deux rapports anharmoniques égaux O$(abcd)$ et O′ $(a'b'c'd')$. Qu'on prenne sur la seconde un point P′ arbitrairement, il lui correspond sur la première un point P, et un seul, tel que le rapport anharmonique P $(abce)$ est égal à P′ $(a'b'c'e')$; et réciproquement, un point P étant pris sur la première conique, il lui correspond sur la seconde un seul point P′ tel, que les deux rapports anharmoniques soient égaux.

Donc les deux droites OP et O′P′, tournant autour des deux points fixes O et O′, se correspondent *anharmoniquement*. Que l'on considère actuellement le rapport anharmonique P′ $(a'b'c'f')$; il correspondra au point P′ un point P_1 sur la conique C, tel que le rapport anharmonique P_1 $(abcf)$ sera égal à P′ $(a'b'c'f')$; et la droite OP_1 correspondra anharmoniquement à la droite O′P′.

Donc les deux droites OP et OP_1 se correspondent entre elles anharmoniquement; c'est-à-dire qu'elles forment deux faisceaux homographiques. Ces deux faisceaux ont deux *rayons doubles*, dont chacun détermine sur la conique C un point P auquel correspond sur C′ un point P′ tel, que les deux rapports anharmoniques

$$P'(a'b'c'e') \quad \text{et} \quad P'(a'b'c'f')$$

sont égaux respectivement aux deux $P(abce)$ et $P(abcf)$. Le point P appartient donc à la courbe cherchée. Le second rayon double des deux faisceaux homographiques détermine un second point de la courbe. Donc enfin cette courbe est du troisième ordre.

Soient U celle que décrit le point P, et U′ celle que décrit son homologue P′.

Si l'on considère les deux systèmes de six points a, b, c, d, e, g et a', b', c', d', e', g', on aura pareillement deux courbes du troisième ordre V, V′ comme lieux géométriques des points P et P′ qui satisfont à la condition de rendre anharmoniques les deux faisceaux

$$P(abcdeg) \quad \text{et} \quad P'(a'b'c'd'e'g').$$

Donc enfin les points d'intersection des courbes U et V, et ceux des courbes U′ et V′ donnent les positions des points cherchés P et P′; et comme les courbes ont deux à deux cinq points communs connus *à priori*, elles se couperont mutuellement en quatre autres points qu'on déterminera par des intersections de coniques sans tracer aucune courbe du troisième ordre, comme on sait. Mais trois seulement de ces quatre points satisfont à la question, le quatrième y étant étranger [*].

---

[*] *Nouv. Annales de Math.*, t. XIV, p. 50. — Il est facile de reconnaître que les quatre points d'intersection P, Q, R, S des deux courbes U et V ne peuvent pas satisfaire tous les quatre à la question, et par conséquent qu'il y en a au moins un qui lui est étranger. Car s'ils satisfaisaient tous les quatre, une troisième courbe, construite avec les six points a, b, c, d, f, g, passerait aussi par ces quatre points. Cette courbe et les deux premières auraient donc huit points communs, savoir a, b, c, d et les quatre P, Q, R, S. Par conséquent les trois courbes passeraient par un même neuvième point. Ce point serait e à l'égard des deux premières courbes, f à l'égard de la première et de la troisième, et g à l'égard de la deuxième et de la troisième. Résultat impossible. Donc, etc.

Par conséquent la question qu'il s'agissait de résoudre dans cette *Note* admet trois solutions; ce qu'il ne faut pas entendre dans ce sens qu'on peut faire passer plus d'une courbe du quatrième ordre par les quatorze points donnés. Cette courbe W est unique; mais si l'on prend sur elle sept points a, b, c, d, e, f, g et sept autres points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, il y a trois manières différentes d'en choisir un autre x tel, que les sept courbes du troisième ordre

$$(abcdefg\,x)\quad [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$$

interceptent dans la courbe W des cordes qui vont toutes concourir en un même point y de cette courbe.

Si, au contraire, on prenait ce point de concours parmi les quatorze qui sont donnés, et qu'on cherchât deux points x, y tels, que le faisceau de cubiques

$$(abcdefxy)\ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$$

fût anharmonique au faisceau de droites

$$g\,[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7],$$

le problème n'aurait qu'une seule solution. Mais ce n'est pas ici le lieu de faire connaître ce troisième mode de description de la courbe du quatrième ordre. On le trouvera dans un autre *Mémoire*, avec des considérations assez étendues sur la description de celles de ces courbes qui doivent avoir des points doubles ou un point triple donnés, *à priori*, de position et d'espèce.

Vaisseau l'Arcole, mars 1857.

DÉMONSTRATION NOUVELLE

D'UNE PROPOSITION

RELATIVE A LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET.

La proposition dont je veux donner une démonstration nouvelle et très-simple appartenant à une théorie exposée avec détail dans les *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss, je puis m'en référer à cet ouvrage quant à la terminologie dont j'aurai à faire usage, et passer immédiatement à l'objet qu'il s'agit de remplir.

« Étant donnée une substitution impropre $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ par laquelle la » forme quadratique $(a, b, c) = f$ (dont le déterminant est supposé » différent de zéro) se change en elle-même, on peut toujours obtenir » une nouvelle forme appartenant à la même classe, et pour laquelle » le double du coefficient moyen soit un multiple du premier coef- » ficient. »

La supposition de l'énoncé fournit sur-le-champ, outre l'équation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1,$$

les trois que voici

$$a(\alpha^2 - 1) + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 = 0,$$
$$a\alpha\beta + 2b\alpha\delta + c\gamma\delta = 0,$$
$$a\beta^2 + 2b\beta\delta + c(\delta^2 - 1) = 0,$$

dont la seconde a été simplifiée par la substitution de $\alpha\delta + 1$ à la place de $\beta\gamma$. En faisant la somme des deux premières après les avoir multipliées respectivement par $-\delta$ et γ, et ensuite la somme des deux dernières multipliées par β et $-\alpha$, on obtient ces nouvelles équations

$$a[\alpha(\beta\gamma - \alpha\delta) + \delta] = a(\alpha + \delta) = 0,$$
$$c[\delta(\beta\gamma - \alpha\delta) + \alpha] = c(\alpha + \delta) = 0.$$

Il résulte de là que si a et c ne s'évanouissent pas à la fois, on a

$$\alpha + \delta = 0.$$

Mais cette dernière équation a également lieu dans le cas excepté; en effet, comme dans ce cas b est différent de zéro, on a en même temps

$$\alpha\gamma = 0, \quad \alpha\delta = 0, \quad \beta\delta = 0,$$

équations qui ne sont compatibles avec l'équation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1,$$

qu'autant qu'on suppose simultanément

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0.$$

Il est donc prouvé que notre substitution impropre est toujours de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & -\alpha \end{pmatrix}$$

où

$$\alpha^2 + \beta\gamma = 1.$$

Arrêtons-nous un instant au cas particulier où le troisième coefficient γ de cette substitution s'évanouit. Nos équations donnent alors

$$\alpha = -\delta = \pm 1, \quad 2b = \pm a\beta.$$

On voit que, dans ce cas, la forme donnée f jouit déjà de la propriété exigée. On conclut de là que si γ n'est pas zéro, tout se réduit à obtenir une forme équivalente à la forme f, et qui soit transformable en elle-même par une substitution impropre dont le troisième coefficient s'évanouisse.

Soit, à cet effet,

$$\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \rho \end{pmatrix}$$

la substitution propre la plus générale, ou, autrement dit, soient λ, μ, ν, ρ quatre entiers assujettis à la seule condition

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1.$$

Appelons φ la forme en laquelle se change f lorsqu'on lui applique cette substitution. La substitution inverse

$$\begin{pmatrix} \rho, & -\mu \\ -\nu, & \lambda \end{pmatrix},$$

qui est également propre, changera φ en f.

Cela posé, composons les trois substitutions

$$\begin{pmatrix} \rho, & -\mu \\ -\nu, & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \rho \end{pmatrix}$$

dans l'ordre où nous venons de les écrire; ces substitutions changeant, la première φ en f, la seconde f en f, la troisième f en φ, la substitution composée, qui est d'ailleurs évidemment impropre, changera la forme φ en elle-même. La question est donc réduite à rendre égal à zéro le troisième coefficient de notre substitution composée.

Pour obtenir ce coefficient, commençons par composer les deux premières substitutions, et bornons-nous à écrire le troisième et le quatrième coefficient de la substitution qui résulte de cette première composition. Ces coefficients étant

$$\gamma\lambda - \alpha\nu, \quad -\alpha\lambda - \beta\nu,$$

il en résulte, pour le coefficient qu'il s'agit d'obtenir, l'expression

$$(\gamma\lambda - \alpha\nu)\lambda - (\alpha\lambda + \beta\nu)\nu = \gamma\lambda^2 - 2\alpha\lambda\nu - \beta\nu^2.$$

Comme γ, par hypothèse, n'est pas zéro, nous pouvons, avant d'égaler notre expression à zéro, la multiplier par γ : nous aurons ainsi

$$\gamma(\gamma\lambda^2 - 2\alpha\lambda\nu - \beta\nu^2) = (\gamma\lambda - \alpha\nu)^2 - (\alpha^2 + \beta\gamma)\nu^2 = (\gamma\lambda - \alpha\nu)^2 - \nu^2 = 0,$$

par conséquent,

$$[\gamma\lambda - (\alpha + 1)\nu][\gamma\lambda - (\alpha - 1)\nu] = 0,$$

et l'on voit que si, après avoir réduit le rapport $\frac{\alpha \pm 1}{\gamma}$ (où le signe ambigu est à volonté) à sa plus simple expression $\frac{\lambda}{\nu}$, on déduit des entiers

λ, ν deux entiers μ, ρ qui satisfassent à l'équation

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1,$$

la substitution $\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \rho \end{pmatrix}$ appliquée à la forme f changera cette forme en une autre équivalente φ jouissant de la propriété exigée.

Toul, le 15 août 1857.

SUR LE PRODUIT

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1);$$

Par M. J. LIOUVILLE.

Si l'on est assuré qu'il y a au moins un nombre premier dans la suite

$$m,\ m+1,\ m+2,\ldots,\ m+n-1,$$

on pourra affirmer par cela même qu'il y a au moins un nombre premier qui divise *une seule fois* le produit

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1);$$

d'où l'on conclura, par exemple, que ce produit n'est ni un carré, ni un cube, ni une puissance d'ordre quelconque, ni même un produit de puissances.

On démontre facilement le théorème que je viens d'énoncer en s'appuyant sur cette vérité, aujourd'hui bien établie, qu'entre un nombre quelconque et son double (diminué même de deux unités si le nombre surpasse 3) il y a au moins un nombre premier [*].

Soit en effet, conformément à l'hypothèse, p un nombre premier contenu dans la suite

$$m,\ m+1,\ m+2,\ldots,\ m+n-1;$$

et s'il y en a plusieurs, soit p le plus grand de tous. Il faudra que l'on ait

$$m+n-1<2p,$$

sans quoi l'on rencontrerait dans la suite indiquée un nombre premier plus grand que p. Or les termes

$$m,\ m+1,\ldots,\ p-1,$$

[*] Voyez le beau Mémoire de M. Tchebichef, 1re série, t. XVII, p. 366.

qui précèdent p (si l'on n'a pas $m = p$), ne peuvent avoir que des diviseurs premiers moindres que p, et il en est de même des termes

$$p + 1, \ldots, m + n - 1,$$

qui suivent p (si p n'est pas précisément le dernier terme) : cela résulte de ce que tous ces termes sont plus petits que $2p$ d'après l'inégalité ci-dessus. Donc p ne divise le produit

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)$$

qu'une seule fois ; ce qu'il fallait prouver.

Ceci s'applique de soi-même au produit

$$2.3.4\ldots n,$$

qui par conséquent n'est jamais une puissance exacte, ni même un produit de puissances.

Il est aisé de voir aussi que la même propriété appartient, quel que soit m, au produit

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1),$$

lorsque l'on a

$$n > m - 5.$$

On arriverait à des résultats analogues à ceux qui précèdent pour le produit

$$(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)$$

de n termes consécutifs pris dans la suite des nombres impairs (c'est-à-dire des nombres premiers à 2), et pour d'autres produits où l'on n'admettrait que des facteurs premiers à certains nombres donnés. On pourrait aussi considérer des produits où chacun des facteurs serait déjà un produit du genre de ceux qu'on vient d'indiquer. Mais j'abandonne ces développements à la sagacité du lecteur.

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}{(1+\sqrt{1+gx})^{2p+2q}};$$

Par M. J. LIOUVILLE.

L'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}{(1+\sqrt{1+gx})^{2p+2q}},$$

que je représenterai par A, et dont la forme est assez remarquable, se ramène toujours aux intégrales trinômes, et par conséquent à la *série générale* de Gauss.

En désignant en effet par B l'intégrale trinôme

$$\int_0^1 \frac{x^{p+q-\frac{1}{2}}(1-x)^{p+q-\frac{1}{2}}\,dx}{(1+gx)^p},$$

on a pour le rapport de A à B cette expression simple, où entrent les fonctions *gamma* de Legendre :

$$\frac{A}{B} = \frac{(p+q)\,\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(p+q+\frac{1}{2}\right)}.$$

Il est inutile d'avertir que π marque à l'ordinaire le rapport de la circonférence au diamètre. Je suppose le paramètre g réel et pris à volonté de -1 à $+\infty$, ou imaginaire, mais tel que la partie réelle de $1+g$ soit positive; quant aux exposants p, q, on les prendra réels et positifs, ou bien imaginaires, mais à partie réelle positive.

La valeur de l'intégrale B est connue dans quelques cas particuliers, par exemple quand $g=-1$: la valeur de A s'en déduira, comme on voit, sur-le-champ.

SUR LA FONCTION $E(x)$,

QUI MARQUE LE NOMBRE ENTIER CONTENU DANS x;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je désigne par $E(x)$ l'entier contenu dans x, de manière que si l'on pose

$$x = E(x) + r,$$

le reste r soit nul ou positif, mais plus petit que l'unité. La fonction $E(x)$ jouit, comme on sait, d'un grand nombre de belles propriétés. Si celle que je vais indiquer paraît curieuse aux géomètres, je pourrai plus tard en ajouter d'autres du même genre, avec la démonstration.

Soit m un nombre impair donné. Considérons, parmi les nombres impairs 3, 5, 7,..., m, ceux qui sont premiers et de la forme $4\nu + 3$, ou qui du moins s'expriment par une puissance exacte d'un nombre premier de cette forme. Désignons par n un quelconque d'entre eux, et calculons l'entier marqué par

$$E\left(\frac{m+n}{2n}\right).$$

La somme

$$\sum E\left(\frac{m+n}{2n}\right)$$

des entiers ainsi obtenus pour toutes les valeurs citées de n, est toujours impaire quand $m = 8\mu \pm 3$, et au contraire toujours paire quand $m = 8\mu \pm 1$.

Exemple : $m = 23$, d'où $n = 3, 7, 9, 11, 19, 23$. Les entiers à considérer sont

$$E\left(\frac{26}{6}\right),\quad E\left(\frac{30}{14}\right),\quad E\left(\frac{32}{18}\right),\quad E\left(\frac{34}{22}\right),\quad E\left(\frac{42}{38}\right),\quad E\left(\frac{46}{46}\right):$$

le premier et le second sont pairs, les quatre autres sont impairs; la somme est donc paire.

QUESTIONS DYNAMIQUES.

SUR

LA PERCUSSION DES CORPS,

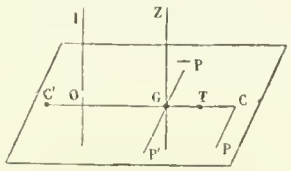
PAR M. POINSOT.

CHAPITRE PREMIER.

Théorie des centres de percussion, de rotation spontanée, et de quelques nouveaux centres qui jouissent de propriétés remarquables dans le mouvement des corps.

I. — *Du centre de percussion.*

1. Considérons un corps libre de figure quelconque, et supposons que ce corps reçoive tout à coup une impulsion par l'action d'une force unique P dont la direction passe à une distance quelconque de



son centre de gravité G. Si de ce centre G on abaisse une perpendiculaire GC sur la direction de cette force, le pied C de cette perpendiculaire, où l'on peut supposer que l'impulsion P est immédiatement appliquée, est le point que je nommerai le *centre de percussion.*

2. Si le corps qui a reçu cette impulsion est abandonné à lui-même, et qu'à une époque quelconque du mouvement on considère les différentes forces individuelles dont les différentes molécules sont alors animées, on trouvera que toutes ces forces sont réductibles à une force unique exactement la même que l'impulsion primitive P qui a

mis le corps en mouvement : c'est ce qui résulte évidemment du principe général de la *conservation des forces et des moments*.

Il y aura donc toujours dans ce corps, et à la même distance du centre de gravité G, *un centre de percussion* C, c'est-à-dire un point où une force unique étant appliquée serait capable de donner à ce corps supposé en repos tout le mouvement actuel qui l'anime ; et par conséquent il y aura toujours un point par lequel on pourrait arrêter tout le mouvement du corps, soit en y appliquant une force unique égale et contraire à l'impulsion primitive, soit en y présentant un obstacle ou point fixe que le corps viendrait frapper.

3. Mais si un corps dont le mouvement est dû à une impulsion unique, conserve un centre de percussion dans toute la suite de son mouvement, on ne peut pas dire qu'il y ait toujours dans un corps en mouvement un centre de percussion ; car le mouvement de ce corps peut provenir de forces qui ne sont pas réductibles à une seule, et alors il n'y a pas de force unique capable de donner au corps le mouvement actuel qui l'anime, et par conséquent il n'y a point dans ce corps de centre de percussion. Nous examinerons ailleurs le mouvement d'un corps qui est animé par des forces quelconques : mais ici nous ne considérerons que le cas particulier où le corps a été mis en mouvement par une impulsion unique P ; et nous supposerons même que cette impulsion soit dirigée dans un plan mené par le centre de gravité G du corps perpendiculairement à l'un de ses trois axes principaux GZ.

4. Nous désignerons toujours par M la masse du corps, et par MK^2 son *moment d'inertie*, c'est-à-dire, *la somme des produits de toutes ses particules par les carrés de leurs distances à l'axe* GZ *que l'on considère*. On voit donc que *la ligne* K *ne sera autre chose que le côté du carré moyen entre les carrés des distances de toutes les particules égales du corps à l'axe principal de rotation dont il s'agit*. C'est une quantité constante, donnée pour chaque corps, et qui ne dépend que de la figure formée par les différents points qui le composent.

Cela posé, désignons par h la distance CG du centre de percussion C au centre de gravité G, et voyons à quoi se réduit tout le mouvement du corps en vertu de cette impulsion unique P qui lui est appliquée

II. — *Du centre spontané de rotation.*

5. La force appliquée en C peut être remplacée par une autre P′ égale, parallèle et de même sens appliquée en G, et par un couple (P, — P) appliqué sur le bras de levier CG $= h$, et dont le moment est Ph.

Or la force P′ = P appliquée au centre de gravité G donne à toutes les particules du corps une commune vitesse $v = \frac{P}{M}$; et le couple dont le moment est Ph fait tourner le corps autour de l'*axe principal* GZ avec une vitesse angulaire $\theta = \frac{Ph}{MK^2}$.

Par ce double mouvement, un point O, qui serait pris sur le prolongement de la ligne CG du côté opposé au centre de percussion, à la distance OG $= a$, se trouverait animé à la fois par deux vitesses contraires : l'une $v = \frac{P}{M}$, l'autre $a\theta = \frac{aPh}{MK^2}$. Si donc on voulait chercher sur le prolongement de CG quel est le point O du corps pour lequel ces deux vitesses contraires sont égales, on n'aurait qu'à poser l'équation

$$\frac{P}{M} = \frac{aPh}{MK^2};$$

ce qui donne sur-le-champ

$$ah = K^2,$$

et par conséquent

$$a = \frac{K^2}{h}$$

pour la distance a de ce point O au centre de gravité G.

6. Ainsi il y a toujours, sur la ligne qui va du centre de percussion au centre de gravité du corps, et de l'autre côté de ce dernier centre, un point O qui reste immobile au premier instant ou qui ne reçoit aucun mouvement de la percussion appliquée en C. Et il en est de même pour tous les points du corps qui sont situés sur la parallèle OI menée du point O à l'axe principal GZ.

Tout le mouvement du corps se réduit donc, à chaque instant, à une

simple rotation autour de cette droite OI comme si elle était fixe, et c'est cette droite OI qu'on appelle l'*axe spontané* de rotation, parce que c'est un axe que le corps prend comme de lui même au premier instant. Mais en ne considérant ici de cet axe spontané que le seul point O qui tombe en ligne droite avec le centre de gravité et le centre de percussion, nous donnerons à ce point O le nom de *centre spontané* de rotation.

7. Le point du corps qui fait actuellement le centre spontané de rotation, a donc une vitesse nulle, et le corps tourne autour de ce point dans l'instant que l'on considère.

Or, le centre de gravité G ayant une vitesse exprimée par $a\theta$, et a étant la distance de G au point O, il s'ensuit que le corps a autour du centre spontané la même vitesse angulaire θ qu'il a autour du centre de gravité pendant la translation de ce centre G dans l'espace.

Un point quelconque pris à la distance y du centre spontané O, a donc la vitesse $y\theta$: ainsi le centre C de percussion, par exemple, qui est à la distance $a + h = l$, a la vitesse $l\theta$.

Il faut bien remarquer que le centre spontané O n'est pas, comme le centre de gravité G, un point qui reste toujours le même dans l'intérieur du corps : il change d'un instant à l'autre, ou plutôt c'est un nouveau point du corps qui devient, d'un instant à l'autre, le centre spontané, comme c'est un nouveau point qui devient le centre de percussion C. Et en effet, ces deux centres C et O devant toujours se trouver, avec le centre G, sur une même ligne droite perpendiculaire à la route du centre de gravité, et aux mêmes distances respectives h et a de ce centre G, il est clair que, pendant le mouvement du corps, ils décrivent pour ainsi dire deux circonférences de cercle des rayons respectifs h et a autour du centre de gravité : ou, pour parler d'une manière plus exacte, ce sont les différents points de ces circonférences qui deviennent successivement les centres de percussion et de rotation spontanée.

COROLLAIRES.

8. Par l'équation

$$ah = K^2,$$

qui donne la distance du point O au centre de gravité G, on voit que

la position du centre spontané ne dépend ni de la masse M du corps, ni de la quantité P de la force qui frappe au centre de percussion C, mais uniquement de la distance h de cette force au centre de gravité G. Le produit ah étant toujours le même, on voit que si h diminue, a augmente dans la même proportion ; ainsi plus le centre de percussion se rapproche du centre de gravité, plus le centre spontané s'éloigne de l'autre côté, et réciproquement.

9. Si l'on suppose $h = 0$, on trouve $a = \infty$. On pourrait donc dire que si le centre de percussion tombe au centre de gravité, le centre spontané est à une distance infinie, mais à proprement parler il n'y a plus alors de centre spontané de *rotation;* car, dans ce cas singulier, le corps étant frappé par son centre de gravité même, il n'y a plus qu'un simple mouvement de translation dans l'espace.

10. Réciproquement, si l'on suppose $h = \infty$, on trouve $a = 0$, c'est-à-dire que le centre spontané tombe alors au centre de gravité. Mais dans ce cas il y n'a a plus, à proprement parler, de centre de percussion ; car si le corps tourne sur son centre de gravité même qui reste en repos dans l'espace, il faut nécessairement que la percussion P qui l'a mis en mouvement soit nulle en quelque point qu'on la suppose appliquée, sans quoi le centre de gravité ne serait pas immobile, puisqu'il aurait la vitesse finie $\frac{P}{M}$. Ainsi il n'y a aucune percussion simple et finie P qui puisse donner lieu à un centre spontané coïncidant avec le centre de gravité du corps.

Tout ce qu'on peut dire, c'est que si le centre de percussion est infiniment éloigné du centre de gravité G, le centre spontané O en est infiniment proche, mais il ne s'ensuit pas que ces deux points du corps puissent jamais se confondre en Dynamique, car l'un G aurait la vitesse finie $\frac{P}{M}$, tandis que l'autre O, de sa nature, a une vitesse nulle.

Il n'y a qu'une seule manière d'imaginer que le centre spontané tombe en rigueur sur le centre de gravité même : c'est de supposer $P = 0$, $h = \infty$, et le produit ou moment Ph égal à une quantité *finie*. Dans cette hypothèse mathématique, le corps tournerait sur son centre en vertu du moment fini Ph, et ce centre serait immobile à cause de $P = 0$.

Mais il faut convenir qu'une percussion *nulle* appliquée à une distance *infinie* n'offre à l'esprit aucune idée nette, et qu'on ne voit là ni percussion ni centre de percussion.

Pour expliquer ce cas singulier, il faut donc le considérer en lui-même. Or il est évident que si le corps tourne sur son centre de gravité, c'est que l'impulsion qu'il a reçue provient, non pas d'une force simple, mais bien d'un *couple* qui lui a été appliqué. Ce n'est donc pas une percussion nulle, mais une percussion d'une autre nature, et où il n'y a pas de centre à considérer, ni même de bras de levier déterminé, puisqu'il s'agit d'un couple, et que ce couple peut être changé à volonté en une infinité d'autres d'un effet équivalent.

III. — *Propriétés réciproques du centre de percussion et du centre spontané.*

11. Par cette même équation

$$ah = K^2,$$

qui lie entre elles les distances h et a du centre de percussion et du centre spontané au centre de gravité du corps, on voit que ces deux centres sont en quelque sorte *réciproques* l'un de l'autre : je veux dire que si le corps était frappé au point O qui deviendrait alors le centre de percussion, la rotation se ferait autour du point C qui deviendrait le centre spontané.

12. Si la distance mutuelle $a + h$ de ces deux centres réciproques est désignée par l, on voit encore (à cause de $ah = K^2$) que l'on a indifféremment

$$l = a + \frac{K^2}{a} \quad \text{ou} \quad l = h + \frac{K^2}{h}.$$

13. Cette distance l de deux centres réciproques peut être plus grande que toute ligne donnée, mais elle ne peut jamais être nulle. La moindre valeur qu'elle puisse avoir est la ligne $2K$; car en cherchant la valeur de a qui répond au *minimum* de l, on trouve $a = K$; et par conséquent on a aussi $h = K$; d'où résulte $2K$ pour la distance mutuelle

des deux points réciproques qui, dans un corps donné, sont les moins éloignés l'un de l'autre.

IV. — *Du centre de percussion* maximum.

14. D'après ce qu'on vient de démontrer, si le corps que l'on considère tourne actuellement autour d'un point O situé à une distance a de son centre de gravité G, tout le mouvement de ce corps peut être attribué à l'action d'une force unique qui lui serait appliquée au point C, à la distance $l = a + \frac{K^2}{a}$ de ce centre de rotation O : et par conséquent toutes les différentes forces qui animent en ce moment toutes les différentes molécules du corps sont réductibles à une seule qui passe au point C et dans une direction perpendiculaire à la ligne OG. Donc, si l'on opposait en ce point C une force égale et contraire, ou si l'on y présentait au corps un obstacle fixe, tout le mouvement du corps se trouverait détruit.

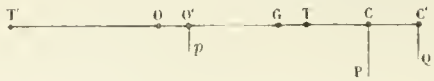
Il semble donc que ce point C soit celui par lequel le corps tournant autour du point O frapperait le plus fortement possible un obstacle ou point fixe qu'il viendrait à rencontrer; et jusqu'ici on a regardé ce point ou centre de percussion comme celui de la plus grande percussion que le corps puisse produire contre un obstacle, et c'est même par cette propriété de *maximum* que ce centre est le plus souvent défini par les auteurs, comme on peut le voir dans l'Encyclopédie et dans la plupart des Traités de Mécanique.

Mais on va voir que le point où le corps frappe avec le plus de force n'est pas ce centre ordinaire de percussion dont on vient de parler, mais un nouveau point T, qui est situé entre le centre de gravité et le centre de percussion ordinaire, et auquel il serait convenable de donner un nom particulier. Ou, si l'on veut éviter les mots nouveaux, comme dans le fond le point C n'est rien autre chose que le centre de l'impulsion unique qui anime le corps, on pourrait donner à ce point le nom de *centre d'impulsion*, et l'on réserverait pour le point nouveau T le nom de *centre de percussion*, qui lui est vraiment propre, puisque c'est le point de la plus grande percussion du corps Mais pour ne rien changer aux dénominations reçues, je le distinguerai simplement par le nom de centre de percussion *maximum*. Quant à

sa position précise dans le corps, nous allons voir que ce point se trouve, en partant du centre de rotation O, à une distance qui est moyenne géométrique entre la distance du centre de gravité et celle du centre de percussion ordinaire au même point O.

Mais, pour arriver à ce théorème, cherchons d'abord la percussion que le corps tournant donnerait à un point *fixe* C′ situé à une distance quelconque x du centre de gravité G, et nous verrons ensuite quelle est la valeur de x qui rend cette percussion un *maximum*.

15. Au moment du choc, on peut considérer le corps comme s'il était en repos et animé tout à coup par la force unique P appliquée au



point C. Or cette force P peut toujours être conçue comme décomposée en deux autres parallèles : l'une Q appliquée en C′, et l'autre p appliquée au point O′ qui serait *réciproque* à C′, c'est-à-dire qui répondrait comme centre spontané de rotation au point C′ considéré comme un centre de percussion. Le point C′ étant à la distance x de G, le point O′ est de l'autre côté à la distance $\frac{K^2}{x}$. La distance mutuelle des deux composantes Q et p est donc $x + \frac{K^2}{x}$; celle de P à p est $h + \frac{K^2}{x}$: donc, par la théorie des forces parallèles, on a pour la composante Q appliquée en C′,

$$Q = P \cdot \frac{K^2 + hx}{K^2 + x^2};$$

et pour l'autre composante p appliquée en O′,

$$p = P \cdot \frac{x^2 - hx}{K^2 + x^2}.$$

Or de ces deux composantes, la dernière p, qui frappe en O′, ne peut produire aucune percussion contre le point fixe C′, puisque ce point C′ est un centre spontané par rapport au point O′ où la force p est appliquée. Il ne reste donc pour frapper l'obstacle C′ que la seule composante Q qui s'y trouve directement appliquée : et de là il s'ensuit que la percussion produite par le corps contre le point fixe C′ placé à la

distance x de son centre de gravité G, est exprimée exactement par la fonction

$$Q = P.\frac{K^2 + hx}{K^2 + x^2},$$

P étant l'impulsion dont le corps est animé, et h la distance CG de cette impulsion au centre de gravité du corps.

16. On peut remarquer en passant que si l'on suppose

$$x = \frac{-K^2}{h} = -a,$$

c'est-à-dire si l'obstacle C′ est placé au centre spontané O, la percussion Q sera nulle, comme cela doit être.

17. Si l'on suppose $x = 0$, c'est-à-dire, si l'on met l'obstacle devant le centre de gravité, la percussion Q est égale à la force P elle-même.

Si l'on suppose $x = h$, auquel cas l'obstacle C′ tombe devant le point C, la percussion Q est encore égale à P.

Ainsi le corps ne frappe point avec plus de force par son centre de percussion que par son centre de gravité. Mais il y a cette différence : c'est que si le corps frappe par le centre de percussion, son mouvement tout entier se trouve éteint; tandis que s'il frappe par son centre de gravité, il ne perd que son mouvement de translation, et conserve après le choc la même rotation θ autour de ce centre G.

18. On voit encore que si x est négative et plus grande que $\frac{K^2}{h}$ ou a, auquel cas l'obstacle C′ est placé au delà du centre spontané O et du

même côté que ce point par rapport au centre de gravité G, la percussion Q devient négative, c'est-à-dire de sens contraire à l'impulsion P : de sorte que l'obstacle C′, pour être frappé par le corps, doit être alors posé de l'autre côté de ce corps, c'est-à-dire en arrière de son mouvement de translation dans l'espace.

Mais il s'agit de voir ici quelle est la distance x du point T où la percussion Q est un *maximum*.

Du point qui fait le centre de percussion maximum.

19. Pour trouver ce point remarquable, on n'a donc qu'à différentier l'expression précédente P. $\frac{K^2 + hx}{K^2 + x^2}$, en y regardant x comme seule variable, et à égaler le résultat à zéro : ce qui donne l'équation du second degré

$$hx^2 + 2K^2x - hK^2 = 0,$$

ou bien, à cause de $\frac{K^2}{h} = a$,

$$x^2 + 2ax - K^2 = 0 :$$

d'où l'on tire

$$x = -a \pm \sqrt{K^2 + a^2},$$

pour la distance cherchée du point T au centre de gravité G (figure ci-dessus, art. **15**).

Si l'on veut considérer la distance λ de ce point T au centre spontané O, comme cette distance est $x + a$, on aura par l'équation même

$$\lambda = \sqrt{K^2 + a^2} = \sqrt{al};$$

d'où résulte ce théorème :

« La distance λ du centre de percussion *maximum* au centre spon-
» tané O de rotation du corps est moyenne géométrique entre les dis-
» tances du centre de gravité et du centre de percussion ordinaire au
» même point O. »

20. Au reste, on peut donner encore une autre expression à ce théorème. Car puisque MK^2 désigne le moment d'inertie du corps autour de l'axe principal qui passe par son centre de gravité G, et que a désigne la distance de ce centre G au point O, $M(K^2 + a^2)$ est, comme on sait, le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe parallèle OI qui passe par le centre spontané O. Donc $K^2 + a^2$ exprime le carré moyen des carrés de toutes les distances des molécules du corps à cet axe OI. Donc, en considérant l'expression précédente

$$\lambda = \sqrt{K^2 + a^2},$$

on peut dire que « si un corps tourne actuellement autour d'un axe » spontané, la distance du centre de percussion *maximum* à cet axe » est égale au côté du carré moyen entre les carrés des distances des » molécules du corps au même axe dont il s'agit, ou, en termes plus » simples, est égale au *bras* de l'inertie du corps autour de cet axe. »

21. Quant au double signe $\pm$ qui affecte cette distance λ, il fait voir qu'il y a deux points de cette nature, l'un à droite, l'autre à gauche du point O, et à la même distance de ce centre spontané O. Le premier T tombe entre le centre de gravité G et le centre de percussion ordinaire C. Le second T′ tombe de l'autre côté au delà du point O.

Ils répondent tous deux à des percussions *maxima*, mais de *sens contraires*. Le premier T est le centre d'une percussion *maximum* de même sens que l'impulsion P qui anime le corps, et plus grande que cette impulsion. L'autre T′ répond aussi à une percussion *maximum*, mais de sens contraire à l'impulsion P, et toujours plus petite.

Ainsi il y a un point T par lequel le corps frappe en avant, non-seulement avec plus de force que par le centre C de percussion lui-même, mais encore avec plus de force que par tout autre point : et il y a un second centre T′ par lequel le corps frappe aussi le plus fortement possible, mais en arrière du mouvement de translation qui l'emporte dans l'espace.

On voit d'ailleurs que ces deux centres T et T′ sont réciproques l'un de l'autre. Car l'équation

$$x^2 + 2ax - K^2 = 0,$$

qui donne leurs distances au centre de gravité G, montre que le produit de ces distances est égal au dernier terme $-K^2$. Si donc l'un de ces points était considéré comme un centre ordinaire de percussion, l'autre serait le centre spontané correspondant.

Corollaires.

22. Si dans les expressions précédentes on suppose $h = 0$, on a le cas particulier où le corps n'est animé que par une impulsion P qui passe par le centre de gravité même. La percussion Q dont le corps

est capable à la distance x de ce centre est alors exprimée par

$$Q = P. \frac{K^2}{K^2 + x^2},$$

et le point T, où cette percussion est un *maximum*, est à la distance $x = 0$, c'est-à-dire, au centre de gravité du corps.

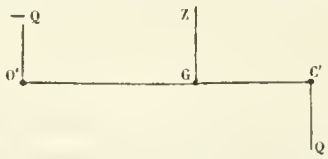
Ainsi, quand un corps n'a dans l'espace qu'un simple mouvement de translation, le centre de percussion *maximum* est unique et se confond avec le centre de gravité : ce qui était d'ailleurs assez évident de soi-même.

23. Si l'on suppose $a = 0$, on a, pour la distance du centre de percussion *maximum*,

$$x = \pm K.$$

C'est le cas particulier où le corps ne serait animé que par un couple, et par conséquent n'aurait d'autre mouvement qu'une simple rotation sur un de ses axes principaux. Comme dans ce cas le centre de rotation et le centre de gravité ne font qu'un seul et même point, le centre de percussion *maximum* n'est pas un point absolument déterminé comme dans les cas qui précèdent; il est seulement à une distance déterminée K du centre de gravité, et par conséquent il peut être pris où l'on voudra sur la circonférence décrite du rayon K autour du centre dont il s'agit.

Au reste, si l'on voulait considérer directement ce cas particulier,



soit N le moment du couple qui anime le corps autour de l'axe principal GZ, et concevons ce couple changé en un autre (Q, — Q) équivalent, appliqué sur la ligne $x + \frac{K^2}{x}$ qui joint le point quelconque C', que l'on veut considérer, à son réciproque O'. On aura pour la force Q avec laquelle le corps tournant frappe en C' à la distance x du centre G,

$$Q = N. \frac{x}{K^2 + x^2},$$

et pour le *maximum* de Q,

$$x = \pm K,$$

comme on l'a trouvé ci-dessus.

Ainsi, quand un corps libre dont le moment d'inertie relatif à l'un de ses trois axes principaux est désigné par MK^2, tourne autour de cet axe principal, c'est à une distance K de cet axe, et dans le plan des deux autres, que le corps tournant peut frapper un obstacle ou point fixe avec la plus grande force possible.

24. Si le corps, par exemple, est une verge ou barre prismatique droite et homogène, dont la longueur soit désignée par 2 L, on a, comme on sait, relativement à un axe passant par son centre de gravité, et perpendiculaire à sa longueur,

$$K = \frac{L}{\sqrt{3}} :$$

ainsi, quand la verge tourne sur cet axe, le point où elle frappe avec le plus de violence est celui qui est à la distance $\frac{L}{\sqrt{3}}$ de son centre de gravité.

Pour un globe homogène dont le rayon est R, on a

$$K = R\sqrt{\frac{2}{5}},$$

et c'est à cette distance du centre que le globe tournant frappe avec la plus grande force possible.

Etc. Etc.

Remarque générale.

25. Voilà donc dans les corps de nouveaux centres qui jouissent de propriétés très-remarquables, et dont la position ne dépend, comme celle du centre de percussion ordinaire, ni de la masse, ni de la quantité de mouvement du corps, mais uniquement de la position du point autour duquel se fait la rotation spontanée : de sorte que si le corps tourne sur son centre de gravité même, les centres de percussion dont il s'agit ne dépendent plus que de la figure.

On voit d'ailleurs combien cette théorie diffère de l'ancienne, et répond à l'idée nette qu'on doit avoir de la percussion. Dans le cas d'un corps qui tourne sur lui-même, par exemple, si l'on voulait chercher suivant la théorie ordinaire ce point particulier qu'on nomme le *centre de percussion*, on trouverait qu'il est situé à une distance infinie du centre de gravité, et que la force de percussion est tout à fait nulle : d'où l'on pourrait conclure qu'un corps qui tourne, mais dont le centre de gravité est en repos, n'a aucune force pour frapper un obstacle ou pour communiquer du mouvement à un point massif qu'on viendrait à lui présenter, ce qui est aussi contraire à l'expérience qu'à notre théorie. Et en effet, nous trouvons ici que si un corps tourne sur lui-même avec une vitesse angulaire θ, ou, ce qui est la même chose, est animé par un couple mesuré par $MK^2\theta$, ce corps est capable de frapper à une distance x de son axe de rotation, avec une force Q exprimée par $MK^2\theta . \frac{x}{K^2+x^2}$; que la percussion *maximum* a lieu à la distance précise $x = K$, et qu'elle a pour mesure la quantité de mouvement $\frac{1}{2} M . K\theta$: de sorte que le corps frappe exactement par ce centre comme si la moitié de la masse M s'y trouvait concentrée.

On trouverait de même que le point réciproque qui est de l'autre côté du centre G, à la distance $x = -K$, est capable de frapper aussi, mais en sens contraire, comme si l'autre moitié de la masse y était concentrée; d'où l'on voit que, dans le mouvement du corps, ces deux centres réciproques se partagent en quelque sorte la masse entière en deux parties égales. Mais cette dernière propriété n'est qu'un cas particulier de celle qui appartient en général à deux centres quelconques *réciproques* l'un de l'autre, comme nous allons le démontrer dans l'article suivant.

V. — *Propriétés nouvelles de deux centres quelconques qui sont* réciproques *l'un de l'autre dans un corps.*

26. On a vu plus haut (**15**) que si le corps est animé d'une impulsion P qui passe à la distance h de son centre de gravité G, ce corps frappe en C′ à une distance quelconque x du même centre G, avec une

force Q exprimée par

$$Q = P . \frac{hx + K^2}{x^2 + K^2},$$

et au point O′ réciproque à C′, avec une force p exprimée par

$$p = P . \frac{x^2 - hx}{x^2 + K^2}.$$

Si l'on met dans ces expressions, au lieu de h sa valeur $\frac{K^2}{a}$, et au lieu de P sa valeur $Ma\theta$, on aura

$$Q = (a + x)\,\theta . M \frac{K^2}{x^2 + K^2},$$

$$p = \left(a - \frac{K^2}{x}\right)\theta . M \frac{x^2}{x^2 + K^2};$$

or $a + x$ étant la distance du point C′ au centre spontané de rotation du corps, $(a + x)\theta$ est la vitesse même de ce point C′ : donc, puisque la percussion Q de ce point est mesurée par sa vitesse multipliée par une masse $m = M . \frac{K^2}{x^2 + K^2}$, on peut dire que ce point C′ frappe avec la même force que si cette fraction de la masse entière M y était concentrée.

De même, dans la seconde expression, le facteur $\left(a - \frac{K^2}{x}\right)\theta$ étant la vitesse du point O′, on voit que ce point, réciproque au premier, frappe comme s'il était chargé d'une masse $n = M . \frac{x^2}{x^2 + K^2}$, ou avec la même force que si cette autre partie de la masse M y était concentrée.

Mais, par les expressions mêmes de ces deux parties m et n, il est évident, 1° que leur somme $m + n$ fait la masse entière M du corps; 2° qu'elles sont l'une à l'autre $:: K^2 : x^2$, et par conséquent $:: \frac{K^2}{x} : x$, c'est-à-dire qu'elles sont inversement proportionnelles aux distances des deux points C′ et O′ au centre de gravité G du corps.

Donc, en considérant deux centres quelconques réciproques l'un de l'autre et les percussions respectives dont ils sont capables, on peut dire que ces deux points frappent exactement comme s'ils se parta-

geaient entre eux la masse du corps dans la raison inverse de leurs distances à son centre de gravité.

27. On pourrait donc en quelque sorte substituer au corps la ligne droite C′O′ considérée comme une verge inflexible et sans masse, mais chargée à ses deux bouts des deux points massifs m et n dont il s'agit. Cette verge serait donée, non-seulement à ses deux extrémités, mais encore en tout autre point de sa direction, de la même force de percussion que le corps lui-même. Car elle aurait non-seulement la même masse et le même centre de gravité, comme on vient de le voir, mais elle aurait encore le même moment d'inertie autour de ce centre G. Et en effet le moment d'inertie des deux points massifs m et n étant $mx^2 + n.\frac{K^4}{x^2}$, si l'on change le premier terme mx^2 en son égal nK^2, et ensuite si dans le second terme $nK^2.\frac{K^2}{x^2}$ on change le facteur nK^2 en mx^2, il vient

$$mx^2 + nK^2\frac{K^2}{x^2} = nK^2 + mK^2 = (m+n)K^2 = MK^2,$$

c'est-à-dire le même moment d'inertie que celui du corps.

Ainsi la verge, animée de la même impulsion P, aurait le même centre spontané, la même vitesse angulaire, et serait capable en chacun de ses points de la même force de percussion que le point correspondant du corps.

Corollaire.

Du centre d'oscillation d'un corps pesant.

On voit par là comment il se fait qu'un corps pesant, suspendu par un point O, oscille exactement comme un pendule simple d'une longueur OC égale à la distance du point O au point C qui lui est *réciproque* dans le corps : car on peut substituer au corps une verge immatérielle CO chargée en ses deux bouts des deux parties m et n de la masse entière, et le mouvement de cette verge est exactement le même que celui du corps en vertu de la même force P qui lui est appliquée. Or cette force P étant ici le poids du corps, et passant ainsi par son centre de gravité G, lequel est en même temps celui des deux points massifs m

et n, il en résulte que la force P peut se partager en deux p et q appliquées à ces points et proportionnelles à leurs masses respectives m et n. Si donc le point O devient fixe, le mouvement du point m est anéanti, et le point n qui est en C demeure abandonné à la simple force q qui est son poids naturel.

REMARQUE.

28. Puisque dans le mouvement du corps, le point C′ pris à la distance x du centre de gravité, frappe avec la même force que si la fraction $\frac{K^2}{x^2+K^2}$ de la masse M y était réunie, comme la seule valeur de x qui puisse rendre cette fraction égale à l'unité est $x = 0$, il s'ensuit que le centre de gravité est le seul point du corps dont on puisse dire qu'il frappe comme si toute la masse y était concentrée. La quantité de cette percussion est $Ma\theta$.

29. Si l'on considère le centre de percussion C, qui répond à $x = h$, on a, pour la force de percussion en ce point,

$$Q = (a + h)\,\theta.\,\frac{MK^2}{h^2 + K^2},$$

ce qui revient à

$$Q = l\theta\,.\,M\frac{a}{l};$$

d'où l'on voit que ce centre C frappe comme un point libre animé de la même vitesse $l\theta$, et chargé de la fraction $\frac{a}{l}$ de la masse du corps. Cette percussion, si l'on ne considère que sa quantité, revient aussi à $Ma\theta$, c'est-à-dire qu'elle est la même que celle qui a lieu par le centre de gravité : mais elle en diffère en ce que c'est la percussion d'une masse plus petite animée d'une vitesse plus grande. Si l'obstacle est un point absolument fixe, ces deux percussions peuvent être regardées comme parfaitement égales, parce que dans l'un et l'autre cas c'est la même quantité de mouvement qui est détruite. Mais si l'obstacle était un point massif *libre* qu'on opposât au mouvement du corps, ces deux percussions ne pourraient plus être confondues. Car il est évident que le corps frappant le point massif μ par le centre de percussion C, lui

communiquerait une vitesse

$$v = \frac{Ma\theta}{\mu + M\frac{a}{l}},$$

tandis que s'il frappe par le centre de gravité G, il ne lui donnera que la vitesse

$$v' = \frac{Ma\theta}{\mu + M},$$

qui est plus petite que la première à cause de $l > a$.

30. On voit donc qu'un corps transmet plus de mouvement à un point libre μ et en repos, en frappant ce point par le centre de percussion qu'en le frappant par le centre de gravité. Mais le centre C de percussion n'est pas pour cela le point par lequel le corps communiquerait au point massif μ la plus grande vitesse possible : et ce n'est pas non plus le centre T de percussion *maximum* qui jouirait de cette propriété. C'est un nouveau point dont la distance au centre de gravité dépend du rapport de la masse M à la masse μ du point choqué. En effet, si l'on désigne par V la vitesse que le corps M communique au point massif μ en le frappant à une distance x du centre de gravité G, on aura par la loi ordinaire du choc entre un point de masse $M\frac{K^2}{x^2+K^2}$ animé de la vitesse $(a+x)\theta$, et un point de la masse μ qui est en repos,

$$V = \frac{M\frac{K^2}{K^2+x^2}(a+x)\theta}{M\frac{K^2}{K^2+x^2}+\mu} = \frac{MK^2(a+x)\theta}{(M+\mu)K^2+\mu x^2}.$$

Et si l'on fait

$$\frac{dV}{dx} = 0,$$

pour avoir le point qui répond au *maximum* de la vitesse communiquée V, on trouvera

$$x^2 + 2ax - \left(1+\frac{M}{\mu}\right)K^2 = 0;$$

d'où l'on tire pour la distance $x + a$ de ce point au centre spontané de rotation,

$$x + a = \pm \sqrt{a^2 + K^2 \left(1 + \frac{M}{\mu}\right)},$$

distance qui dépend, comme on voit, du rapport particulier de M à μ. Ce centre de plus grande vitesse communiquée est donc un nouveau point qui ne pourrait tomber au centre C de percussion ordinaire que dans le cas où l'on aurait

$$M : \mu :: l : a;$$

et qui ne pourrait tomber au centre T de percussion *maximum* que dans le cas où l'on aurait

$$\frac{M}{\mu} = 0,$$

ce qui revient à supposer que le point μ est d'une masse infinie, ou est ce qu'on appelle un point *fixe* : résultat qui s'accorde parfaitement, comme on le voit, avec ce qu'on a trouvé plus haut sur le *maximum* de la percussion que le corps peut produire contre un obstacle fixe.

Nous considérerons ailleurs ces questions nouvelles qui regardent la percussion du corps lorsqu'il choque un point libre : mais nous continuerons de supposer ici que le choc se fait contre un point fixe, ou, ce qui revient au même, contre un point libre, mais dont la masse μ est supposée infinie.

VI. — *De quelques nouveaux centres remarquables dans les corps en mouvement.*

51. Supposons que le corps vienne effectivement à rencontrer un obstacle ou point fixe C′, à la distance x de son centre de gravité G ; la composante Q sera anéantie, et le corps ne restera plus animé que par la composante p qui est appliquée en O′ : or cette force p agira sur le corps comme s'il était libre, car le point C′ où l'on a présenté l'obstacle étant centre spontané par rapport à O′ considéré comme centre de percussion, il est évident que l'obstacle ne peut altérer en rien l'effet de la force p.

Ainsi le corps qui était animé par la force P appliquée à une distance h

du centre de gravité G, se trouvera après le choc animé d'une force nouvelle

$$p = \frac{Px^2 - Phx}{x^2 + K^2},$$

appliquée à une distance $-\frac{K^2}{x}$ du même centre G.

La vitesse primitive du centre de gravité, qui était

$$u = \frac{P}{M},$$

sera donc changée en une autre

$$u' = \frac{p}{M},$$

ce qui donnera (en mettant $MK^2\theta$ au lieu de Ph)

$$(1) \qquad u' = \frac{ux^2 - K^2\theta x}{x^2 + K^2};$$

et la rotation primitive θ, qui était

$$\frac{Ph}{MK^2},$$

sera changée en une autre

$$\theta' = -\frac{pK^2}{x.MK^2},$$

ce qui donnera

$$(2) \qquad \theta' = \frac{K^2\theta - ux}{x^2 + K^2}.$$

52. Cela posé, on voit naître ici plusieurs questions simples et faciles à résoudre.

Et d'abord, on peut demander à quelle distance x, c'est-à-dire en quel point C′ il faudrait présenter l'obstacle pour que le centre de gravité du corps rejaillît en sens contraire de son mouvement actuel, ou se précipitât en avant avec la plus grande vitesse possible, ou bien encore avec une vitesse quelconque donnée.

En second lieu, on peut demander en quel point il faut présenter

l'obstacle pour que le corps vienne à tourner sur lui-même, soit en sens contraire de sa rotation actuelle θ, soit dans le même sens, avec la plus grande vitesse angulaire possible, ou bien avec une vitesse angulaire donnée.

Voilà donc de nouveaux points remarquables que l'on peut considérer dans les corps, et qu'il convient de distinguer par des noms particuliers.

Les premiers pourraient se nommer centres de *réflexion*, ou de *progression*, selon que le centre de gravité du corps est réfléchi ou continue de se porter en avant, avec la nouvelle vitesse dont il s'agit. Mais dans les deux cas on peut les nommer simplement *centres de réflexion*, en sous-entendant que cette réflexion peut être positive ou négative : *positive* quand le corps rejaillit effectivement en sens contraire de son mouvement actuel, et *négative* quand il poursuit sa route avec la nouvelle vitesse dont il se trouve animé.

Les seconds points pourront se nommer de même *centres de conversion*, en regardant cette conversion comme *négative* lorsque le corps, au lieu de revirer sur lui-même en sens contraire de sa rotation actuelle θ, continuera de tourner dans le même sens qu'auparavant.

Du centre de réflexion maximum.

55. Si l'on cherche d'abord ce point contre lequel le corps pourrait se réfléchir avec la plus grande vitesse possible, on n'a donc qu'à faire $u' =$ maximum ou $\frac{du'}{dx} = 0$, et l'on aura pour déterminer la distance x de ce centre l'équation du second degré

$$\theta x^2 + 2ux - \theta K^2 = 0;$$

ce qui donne, en mettant $a\theta$ au lieu de u,

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 + K^2} = -a \pm \lambda;$$

expression qui est la même que celle qu'on a trouvée au n° **19** pour la distance du centre de percussion *maximum*.

Ainsi *le centre de plus grande réflexion est le même que celui de plus grande percussion:* et c'est ce qu'on pouvait voir immédiatement, car

l'équation $\frac{du'}{dx} = 0$, qui donne la valeur de x pour le *maximum* de u', est la même équation que $\frac{dp}{dx} = 0$; et celle-ci, encore la même que $\frac{dQ}{dx} = 0$, qui répond au *maximum* de Q.

34. Des deux valeurs que l'on trouve pour x, la première $\lambda - a$, qui est positive et moindre que h, donne pour u' une valeur

$$u' = -\frac{(\lambda - a)\theta}{2},$$

qui est négative, c'est-à-dire de signe contraire à u ou à $a\theta$: et par conséquent ce premier centre est celui d'une véritable *réflexion* du corps en sens contraire de son mouvement actuel u. La seconde racine

$$x = -(\lambda + a),$$

qui est négative, donne au contraire pour u' une valeur

$$u'' = \frac{(\lambda + a)\theta}{2}$$

positive ou de même signe que u; et par conséquent l'autre centre de réflexion *maximum* n'est en effet qu'un centre de *projection*, c'est-à-dire un point par lequel le corps frappant en arrière de son mouvement de translation, se précipite en avant avec la plus grande vitesse possible.

35. Quand on a $\theta = 0$, c'est-à-dire quand le corps n'est animé que d'un simple mouvement de translation dans l'espace, l'équation précédente donne $x = 0$, d'où l'on voit que le centre de réflexion *maximum* tombe alors au centre de gravité du corps; mais $x = 0$ rend nulle la réflexion u'; de sorte que dans ce cas le mouvement du corps est éteint, comme il est évident que cela doit être.

36. Quand on a $u = 0$, c'est-à-dire quand le corps n'est animé que d'un simple mouvement de rotation sur lui-même, on trouve

$$x = \pm K \quad \text{et} \quad u' = \mp \frac{K\theta}{2}.$$

Ainsi, *pour un corps tournant sur lui-même, le centre de réflexion*

maximum *est à la distance* K *de l'axe de rotation* : c'est donc à cette distance qu'il faut présenter l'obstacle pour que le centre de gravité du corps qui est en repos s'anime tout à coup de la plus grande vitesse possible; cette vitesse est exprimée par $\frac{K\theta}{2}$, c'est-à-dire qu'elle est la moitié de celle qui anime le point même par lequel le corps a choqué.

Des points par lesquels le corps est capable d'une réflexion donnée.

57. Maintenant, si l'on cherche les points par lesquels le corps frappant un obstacle pourrait se réfléchir avec une vitesse donnée V, on n'aura qu'à poser l'équation

$$u' = -V,$$

et l'on aura, pour déterminer la distance inconnue de ces centres, l'équation du second degré

$$(u + V)x^2 - K^2\theta x + VK^2 = 0;$$

or cette équation a ses deux racines réelles toutes les fois qu'on a l'inégalité

$$K^2\theta^2 > 4(V^2 + Vu),$$

et il est même aisé de voir que ces racines sont toutes deux positives et inférieures à h ou $\frac{K^2}{a}$.

Il y a donc dans le corps deux centres de la réflexion donnée V, pourvu que V satisfasse à l'inégalité

$$4V^2 + 4Va\theta < K^2\theta;$$

or, si l'on examine cette inégalité, on voit qu'elle équivaut à celle-ci :

$$V < \frac{(\lambda - a)\theta}{2} < \textit{maximum} \text{ de } u',$$

et que par conséquent elle signifie simplement que la valeur V qu'on se donne pour u' ne doit pas surpasser le *maximum* de u'; ce qui est évident de soi-même.

38. Représentons V par nu, n étant un nombre quelconque donné, et mettons ensuite $a\theta$ au lieu de u, l'inégalité précédente revient à celle-ci :

$$a < \frac{K}{2\sqrt{n^2+n}};$$

on a donc ce théorème : *Si le mouvement du corps est tel, que le centre spontané de rotation ne soit éloigné du centre de gravité que d'une distance* a *inférieure à* $\frac{K}{2\sqrt{n^2+n}}$, *il y a toujours dans ce corps, entre le centre de gravité et le centre de percussion, deux points ou centres par l'un ou l'autre desquels le corps venant à rencontrer un obstacle, se trouverait réfléchi avec une vitesse* V, n *fois plus grande que celle qui l'anime.*

39. Si l'on a la condition particulière

$$K^2\theta^2 = 4(V^2 + Vu),$$

les deux racines de l'équation précédente sont égales, et les deux centres dont il s'agit se confondent en un seul, dont la distance x au centre G est

$$x = \frac{K^2\theta}{2(V+u)}.$$

Si l'on tire de cette équation

$$4V^2 + 4Vu = K^2\theta,$$

la valeur de V, on trouve

$$V = \frac{(\lambda - a)\theta}{2},$$

c'est-à-dire que V est donnée égale au *maximum* de u'. Ainsi la valeur de x qui est $\frac{K^2\theta}{n(V+u)}$ doit se réduire alors à la distance du centre de réflexion *maximum*, savoir $x = \lambda - a$: et c'est en effet ce qui a lieu, comme on peut le vérifier.

40. Si l'on a

$$K^2\theta^2 < 4(V^2 + Vu),$$

les deux racines sont imaginaires, et il n'y a point de centre de la réflexion donnée V.

41. On peut remarquer que cette condition d'imaginarité a toujours lieu, quelle que soit V, lorsque $\theta = 0$: ainsi, *quand le corps n'a qu'un simple mouvement de translation dans l'espace, il ne peut y avoir aucun point par lequel ce corps puisse être réfléchi* : en quelque lieu qu'on présente l'obstacle, le centre de gravité du corps poursuit sa route dans le même sens qu'auparavant, et toujours avec une vitesse moindre.

42. Dans le cas particulier où l'on a $u = 0$, et où, par conséquent, le corps n'est animé que d'une simple rotation θ sur lui-même, il y a toujours deux centres de la réflexion donnée V, pourvu que V soit $< \frac{K\theta}{2}$; ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu au n° **36**, puisque $\frac{K\theta}{2}$ est le *maximum* de la vitesse qu'on puisse donner au centre de gravité d'un corps tournant, en lui présentant un obstacle ou point fixe qui s'oppose à sa rotation.

43. Si, dans l'analyse précédente, on met partout $-V$ à la place de V, on aura le cas d'une réflexion *négative*, c'est-à-dire d'une *progression* du centre de gravité du corps dans le même sens qu'auparavant. On aura donc, pour déterminer ces centres de progression donnée, ou ces points par lesquels le corps frappant l'obstacle continue de se porter dans le même sens avec la vitesse donnée, l'équation

$$(u - V)x^2 - K^2\theta x - VK^2 = 0,$$

dont les racines seront réelles, égales, ou imaginaires, selon qu'on aura

$$K^2\theta^2 - 4(V^2 - Vu) > 0, \quad = 0, \quad \text{ou} \quad < 0. \text{ Etc., etc.}$$

Toute cette discussion est analogue à la précédente.

Corollaire.

Des centres de parfaite réflexion.

44. Si l'on voulait considérer en particulier les points ou centres par lesquels le corps pourrait se réfléchir avec la même vitesse que

celle qui l'anime, comme ferait un corps parfaitement élastique, il n'y aurait qu'à poser l'équation

$$u' = -u,$$

ou à faire $V = u$ dans les formules du n° **37**, et l'on aurait l'équation

$$2ux^2 - K^2\theta x + K^2 u = 0;$$

ou bien, en mettant $a\theta$ au lieu de u, et h au lieu de $\frac{K^2}{a}$, on aurait plus simplement l'équation

$$x^2 - \frac{h}{2}x + \frac{K^2}{2} = 0:$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{h}{4} \pm \frac{\sqrt{h^2 - 8K^2}}{4},$$

racines qui sont toujours réelles, positives et inférieures à h, lorsqu'on a

$$h^2 - 8K^2 > 0;$$

ou bien, en mettant $\frac{K^2}{a}$ au lieu de h, lorsqu'on a l'inégalité

$$a < 2K\sqrt{2}.$$

On voit donc que *si le mouvement du corps est tel, que la distance a du centre spontané* O *au centre de gravité* G *soit moindre que la ligne* $2K\sqrt{2}$, *il y a toujours dans ce corps deux centres de parfaite réflexion; c'est-à-dire deux points tels, que si le corps frappe un obstacle par l'un ou par l'autre, le centre de gravité de ce corps se réfléchit en sens contraire avec une vitesse parfaitement égale à celle qui l'anime.*

Exemples.

45. Supposons, par exemple, $a = \frac{1}{3}K$, la condition $a < 2K\sqrt{2}$ se trouve remplie, et l'on a pour x les deux valeurs positives

$$x_{,} = K \quad \text{et} \quad x_{,,} = \frac{1}{2}K.$$

Ainsi les deux points qui répondent à ces distances sur la ligne GC qui

joint le centre de gravité et le centre de percussion, sont deux centres de réflexion parfaite; c'est-à-dire qu'en présentant un obstacle à l'un ou à l'autre de ces points, le centre de gravité du corps se trouve réfléchi dans l'espace comme s'il était parfaitement élastique.

Cette vitesse que prend le centre de gravité est exactement la même et de même sens, soit que le corps frappe par le premier point, soit qu'il frappe par le second; mais il est clair que la rotation θ' que le corps conserve après le choc, n'est pas la même dans les deux cas, et l'on voit, en mettant l'une après l'autre ces deux valeurs de x dans l'expression de θ' (n° **51**), que la rotation θ' devient $\frac{\theta}{3}$ dans le premier cas, et $\frac{2\theta}{3}$ dans le second.

46. Supposons qu'on ait

$$a = 2\,\mathrm{K}\sqrt{2},$$

les deux racines de l'équation sont égales, et l'on a pour leur valeur

$$x = \frac{1}{4}h.$$

Dans ce cas particulier du mouvement du corps, il n'y a donc qu'un seul point qui soit le centre d'une parfaite réflexion; et ce point se trouve au quart de la ligne qui va du centre de gravité G au centre de percussion C du corps.

Centres de réflexion nulle.

47. Si l'on cherche les points par lesquels le corps choquant n'éprouve aucune réflexion, on n'a qu'à faire

$$u' = 0,$$

et partant,

$$ux^2 - \mathrm{K}^2\theta x = 0,$$

ce qui donne, en mettant $a\theta$ au lieu de u, et h au lieu de $\frac{\mathrm{K}^2}{a}$,

$$x^2 - hx = 0,$$

d'où

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = h :$$

valeurs qui répondent, l'une au centre de gravité, et l'autre au centre de percussion du corps. Et en effet, il est évident que si l'on présente l'obstacle, soit au centre de gravité, soit au centre de percussion, la vitesse de translation sera également détruite. La seule différence de ces deux cas est que, dans le premier on ne détruit que la vitesse u de translation sans altérer la rotation θ; au lieu que dans le second, u et θ se trouveront toutes les deux anéanties.

48. Si l'on cherchait le point où il faut présenter l'obstacle pour que la vitesse de translation ne fût point altérée, on n'aurait qu'à poser $u' = u$, et l'on trouverait

$$x = -a;$$

ce qui répond au centre spontané O de rotation. Et en effet, comme ce point du corps est en repos à chaque instant, il est manifeste qu'il ne peut frapper l'obstacle qu'on lui présente, et qu'ainsi le mouvement du corps n'en peut recevoir aucune altération.

Remarque générale.

49. On peut remarquer que la théorie de ces centres de réflexion est au fond la même que celle des centres de percussion; car, d'après la relation

$$Q + p = P,$$

qui lie entre elles les deux composantes Q et p de la force primitive P qui anime le corps, il est clair que le même point qui est le centre d'une percussion donnée Q, ou, si l'on veut, d'une vitesse perdue $\frac{Q}{M}$, est en même temps le centre d'une réflexion ou vitesse donnée $\frac{p}{M}$. Ces deux centres ne sont donc qu'un seul et même point que l'on considère sous deux aspects différents, mais qu'on détermine de la même manière. Cependant la considération de ces centres sous le point de vue de la réflexion que le corps éprouve quand on y présente un obstacle,

ne méritait pas moins qu'on s'y arrêtât, tant par les questions nouvelles qu'elle peut offrir en Dynamique, que par ce rapprochement singulier qu'elle présente entre les corps durs et les corps élastiques. Il est en effet très-digne de remarque que, par le mouvement seul qui l'anime, un corps parfaitement dur puisse être doué en ses différents points, d'un certain genre d'élasticité : de telle sorte qu'à la rencontre d'un obstacle, on puisse voir le centre de gravité de ce corps se réfléchir en arrière de son mouvement primitif ou se précipiter dans le même sens avec une nouvelle vitesse, comme s'il y avait au point de contact quelque ressort interposé. Et il n'est pas moins remarquable que cette vitesse de réflexion puisse, non-seulement égaler la vitesse même du centre de gravité, comme il arrive dans les corps parfaitement élastiques, mais encore la surpasser, et devenir même aussi grande qu'on le voudra, en supposant que la rotation du corps sur lui-même soit assez rapide.

50. Cet accroissement de vitesse que le centre de gravité d'un corps peut acquérir par la seule présence d'un point fixe que ce corps vient à rencontrer, offre à l'esprit une espèce de paradoxe. Il semble que la quantité de mouvement qui existe dans un corps, et qui s'estime toujours par le produit de la masse et de la vitesse du centre de gravité, ne puisse jamais être augmentée que par l'accession de quelque nouvelle force active qu'on appliquerait à ce corps. Or on ne voit ici qu'un point fixe incapable par lui-même d'exciter du mouvement, et qui n'est propre qu'à le détruire : et pourtant il arrive qu'à la rencontre de ce point fixe, un corps en mouvement, loin de perdre quelque partie de sa vitesse, peut s'animer tout à coup d'une vitesse plus grande et dans le sens même de sa projection primitive. Il y aurait donc eu quelque sorte ici du mouvement *créé*, quand il semble qu'il ne puisse y avoir que du mouvement perdu : ce qui paraît bien contraire aux principes généraux de la Dynamique.

Mais il faut observer qu'il n'y a pas de *point fixe* dans la nature ; qu'un point considéré comme fixe n'est en effet qu'un point *libre*, mais qu'on suppose chargé d'une masse extrêmement grande et comme infinie par rapport à celle du corps que l'on considère ; que par conséquent, si ce point massif ne reçoit, par l'action d'une force finie qui lui est appliquée, qu'une vitesse infiniment petite et nous paraît ainsi rester

immobile, il n'en faut pas moins considérer qu'il a reçu une quantité de mouvement finie, qui y a passé tout entière, et qu'ainsi la force appliquée n'a pas été détruite, mais subsiste encore sans la moindre altération.

Lors donc que l'on voit un corps s'animer, à la rencontre de quel que point fixe, d'une vitesse plus grande que celle qu'il avait auparavant, si l'on veut connaître la quantité de mouvement qui existe après le choc, il ne faut pas seulement considérer la quantité de mouvement dont le corps s'est animé, mais encore celle qu'il a donnée en sens contraire au point fixe dont il s'agit. Et si l'on prend, comme on doit le faire ici, la *différence* de ces deux quantités, on retrouvera précisément la même quantité de mouvement qui existait avant le choc : de sorte que le principe général de la *conservation des Forces* se trouvera parfaitement observé. Et l'on peut voir qu'il en sera de même du principe de la conservation des *Aires*, si l'on n'oublie pas de considérer le mouvement du point fixe ou plutôt de ce point libre d'une masse infinie. Ainsi l'on ne voit plus de paradoxe, ou d'exception aux principes de la science, aussitôt qu'on regarde, non pas le corps mobile seul, mais le système composé de ce corps et du point massif dont il s'agit.

51. Mais pour en revenir au mouvement particulier du corps, sans égard à celui du point fixe qui est insensible, il est bon de faire encore ou de rappeler une remarque importante que le lecteur a déjà pu faire de lui-même. C'est que cette propriété de pouvoir être réfléchi à la rencontre d'un obstacle, ou d'être jeté en avant avec plus de vitesse qu'il n'en avait d'abord, vient essentiellement du mouvement de *rotation* que le corps a sur lui-même. Car s'il n'est animé que d'un simple mouvement de translation, il n'est capable d'aucune réflexion par aucun de ses points, ni d'aucune progression avec une vitesse supérieure à la sienne. Le centre de gravité de ce corps ne peut qu'être retardé dans sa marche, ou tout à fait arrêté si l'obstacle est présenté au corps dans une direction qui passe par le centre de gravité même. Mais quand le corps tourne sur lui-même, il est doué de cette espèce de ressort dont je viens de parler, et peut présenter ces effets singuliers qu'on observe dans le mouvement d'un corps, à la rencontre de quelque obstacle, ou d'une suite d'obstacles qui lui seraient successivement présentés.

Mais pour achever cette théorie, il faut considérer maintenant les points du corps sous ce second point de vue de la *conversion* ou de la rotation nouvelle qu'il prend à la rencontre d'un point fixe.

Du centre de conversion maximum.

52. On a vu (n° **31**) que si l'obstacle ou le point fixe est présenté au mouvement du corps dans une direction qui passe à la distance x de son centre de gravité, la rotation θ de ce corps est changée en une autre θ' telle, qu'on a

$$\theta' = \frac{K^2\theta - ux}{x^2 + K^2}.$$

Pour avoir le point qui répond au *maximum* de θ', c'est-à-dire, au centre de conversion *maximum*, on n'a donc qu'à poser l'équation

$$\frac{d\theta'}{dx} = 0,$$

ce qui donne l'équation du second degré

$$ux^2 - 2K^2\theta x - uK^2 = 0:$$

d'où l'on tire, en mettant au lieu de u sa valeur $a\theta$ ou $\frac{K^2}{h}\theta$,

$$x = h \pm \sqrt{h^2 + K^2},$$

racines toutes deux réelles, l'une positive et l'autre négative.

Ainsi il y a toujours deux centres de conversion *maximum* : l'un qui tombe à droite du centre de gravité, du même côté que le centre de percussion, et l'autre qui tombe à gauche, du même côté que le centre spontané.

Si l'on veut considérer la distance δ des points dont il s'agit au centre de percussion C, comme cette distance est évidemment $x - h$, on aura par l'expression précédente

$$\delta = \sqrt{h^2 + K^2} = \sqrt{hl},$$

c'est-à-dire que *la distance des centres de conversion* maximum *au centre de percussion* C *est moyenne géométrique entre la distance* h *du centre de gravité et la distance* l *du centre spontané au même point* C.

C'est un théorème tout à fait semblable à celui qui regarde les centres de percussion ou de réflexion *maximum* (**19**). D'où l'on voit que les centres de conversion sont, dans les corps, les mêmes points qui deviendraient centres de réflexion si le mouvement du corps était changé de manière que le centre de percussion devînt le centre spontané, et réciproquement.

53. Si, dans l'expression de θ', on met au lieu de x la première racine positive

$$x = h + \delta,$$

on trouve

$$\theta' = -\theta \frac{K^2}{2h(h+\delta)},$$

valeur qui est négative, c'est-à-dire de signe contraire à θ. Le premier centre de conversion *maximum* est donc un point par lequel on fait prendre au corps une rotation *maximum* de *sens contraire* à sa rotation primitive θ.

Si l'on substitue au lieu de x la seconde valeur

$$x = h - \delta,$$

qui est négative, on trouve

$$\theta' = \theta . \frac{K^2}{2h(\delta - h)};$$

valeur positive, ou de même signe que θ à cause de $\delta > h$. Le second centre de conversion est donc un point par lequel on fait prendre au corps une rotation *maximum* de *même sens* que sa rotation primitive θ.

Cas particuliers du mouvement du corps.

54. Si le mouvement de translation u est nul, on trouve

$$x = 0 \quad \text{et} \quad \theta' = \theta,$$

c'est-à-dire que le centre de conversion *maximum* tombe alors au centre de gravité, et que la rotation primitive du corps n'est point altérée.

55. Si le mouvement de rotation θ est nul, on trouve

$$x = \pm \mathrm{K} \quad \text{et} \quad \theta' = \mp \frac{u}{2\mathrm{K}}.$$

COROLLAIRE I.

Des points ou centres d'une conversion donnée.

56. Si l'on voulait trouver les points ou centres d'une conversion donnée Θ, il faudrait poser

$$\theta' = -\Theta,$$

et l'on aurait, pour déterminer les distances x de ces points, l'équation du second degré

$$\Theta x^2 - ux + \mathrm{K}^2(\theta + \Theta) = 0,$$

dont les racines sont réelles pourvu qu'on ait

$$u^2 \quad \text{ou} \quad a^2\theta^2 > 4\mathrm{K}^2(\Theta^2 + \theta\Theta).$$

Il y a donc toujours, sous la condition de cette inégalité, deux centres de la conversion donnée Θ.

Si l'on examine cette condition, on peut voir qu'elle revient à celle-ci

$$\Theta < \theta . \frac{\delta - h}{2h} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{K}^2}{2h(\delta + h)}:$$

c'est-à-dire que la condition nécessaire pour l'existence d'un centre de conversion donnée Θ signifie simplement que cette valeur donnée Θ ne doit pas surpasser celle qui convient au *maximum* de θ'; ce qui est évident de soi-même.

57. Soit $\Theta = n\theta$, n étant un nombre quelconque donné; l'équation précédente devient

$$nx^2 - ax + (n+1)\mathrm{K}^2 = 0;$$

ce qui donne

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{K}^2(n^2+n)}}{2n},$$

racines toutes deux réelles et positives, pourvu qu'on ait

$$a^2 - 4K^2(n^2 + n) > 0.$$

Ainsi *quand le centre spontané du corps est assez éloigné du centre de gravité pour qu'on ait*

$$a > 2K\sqrt{n^2 + n},$$

il y a toujours dans ce corps, et du même côté que le centre de percussion, deux points par l'un ou par l'autre desquels le corps frappant un obstacle, revirerait tout à coup en sens contraire avec une vitesse angulaire n *fois plus grande que celle qui l'anime.*

Si $a = 2K\sqrt{n^2 + n}$, ces deux centres se confondent en un seul, qui est situé à la distance $\frac{a}{2n}$ du centre de gravité.

58. Actuellement, qu'on suppose n négatif, et l'on verra de même que *si l'on a l'inégalité*

$$a > 2K\sqrt{n^2 - n},$$

il y a dans le corps deux points par l'un ou par l'autre desquels le corps frappant l'obstacle prendrait aussi une rotation n *fois plus grande que celle qui l'anime, mais de même sens que cette rotation.*

Que si $a = 2K\sqrt{n^2 - n}$, ces deux centres se confondent en un seul dont la distance au centre de gravité est $-\frac{a}{2n}$.

Corollaire II.

Centres de parfaite conversion.

59. Pour trouver ces points par lesquels on ferait prendre au corps une rotation égale et contraire à celle qui l'anime, on n'a qu'à faire

$$\theta' = -\theta \quad \text{ou} \quad n = 1$$

dans les expressions du n° **57**, et l'on aura

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8K^2}}{2},$$

valeurs qui sont toutes deux réelles et positives sous la condition

$$a^2 - 8\,K^2 > 0.$$

60. Si l'on faisait

$$G' = -G \quad \text{ou} \quad n = -1,$$

on trouverait

$$x^2 + ax = 0,$$

d'où

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = -a:$$

distances qui répondent, l'une au centre de gravité, et l'autre au centre spontané de rotation; et il est clair en effet que si l'on présente l'obstacle en l'un ou l'autre de ces deux points du corps, la rotation nouvelle qu'il prendra sera encore la même que celle qui l'anime, c'est-à-dire que la rotation primitive du corps ne sera point altérée. Etc. Etc.

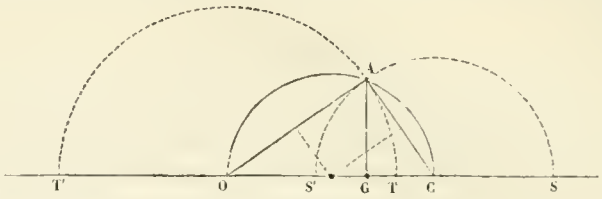
Remarque.

61. Mais il est inutile de pousser plus loin l'énumération de ces centres de conversion donnée, dont la recherche est analogue à celle des centres de réflexion, et ne présente aucune espèce de difficulté. Il faut d'ailleurs remarquer que ces points, relatifs à de certaines quantités qu'on se donne à volonté, ne sont pas, comme les premiers, de véritables *centres;* je veux dire des points uniques et déterminés dans le corps par le seul mouvement que l'on y considère. Ils sont en nombre infini, et, par exemple, les points par lesquels un corps en mouvement peut frapper avec une force donnée, ne sont pas seulement les deux points qu'on a déterminés plus haut, mais il y en a une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété; et l'on verra plus loin que tous ces points *d'égale percussion* sont rangés dans le corps sur le contour d'une certaine ellipse. Mais les points de percussion *maximum* ou de réflexion *maximum*, etc., sont uniques : ce sont les seuls à qui l'on puisse, à proprement parler, donner le nom de *centres*, et qui méritent ainsi d'être particulièrement remarqués.

Quant à la position et à la dépendance mutuelle de ces divers centres dans un même corps, on peut la rendre claire et la mettre pour ainsi dire sous les yeux, dans une figure de géométrie extrêmement simple et qui rend les théorèmes très-faciles à retenir.

Expression géométrique des principaux résultats de ce Mémoire.

62. Soient G le centre de gravité du corps, et C le centre de percussion, c'est-à-dire le centre de l'impulsion primitive qu'il a reçue.



Qu'on mène CG, et qu'au point G on élève sur cette ligne une perpendiculaire GA d'une longueur K égale au *bras de l'inertie* du corps. Si, sur CA comme corde, on décrit un cercle dont le centre tombe sur la direction de CG, le point O, où cette circonférence va couper le prolongement de CG, sera le *centre spontané* de rotation.

Et réciproquement, si l'on part du point O comme donné, en joignant OA et décrivant sur OA comme corde un cercle dont le diamètre partant du point O se dirige suivant OG, on aura le *centre de percussion* au point C où la circonférence va couper le prolongement de OG.

Les deux centres *réciproques* C et O, entre lesquels tombe le centre de gravité G du corps, peuvent donc être considérés comme les deux extrémités du diamètre d'un cercle dont l'ordonnée GA, correspondante au point G, représente cette ligne K qui détermine le *moment d'inertie* du corps.

63. Actuellement, qu'à partir du point O on porte sur le diamètre une longueur OT égale à la corde adjacente OA, et de l'autre côté sur le prolongement, une longueur égale OT′ : les deux points T et T′ seront les deux centres de *plus grande percussion;* savoir : le point T, celui de la plus grande percussion dans le sens du mouvement de translation du corps; et le point T′, celui de la plus grande percussion dans le sens contraire, c'est-à-dire quand le corps frappe en arrière du mouvement qui l'emporte dans l'espace.

64. Ces mêmes points T et T′ seront en même temps les deux centres de *plus grande réflexion;* savoir : le premier T, celui d'une véritable

réflexion du centre de gravité du corps en sens contraire du mouvement actuel; et le second T′, celui d'une réflexion *négative*, c'est-à-dire d'une *progression* de ce même centre de gravité dans le sens même où il se meut actuellement.

65. En second lieu, que l'on porte de même, à partir du point C sur la direction du diamètre, deux longueurs CS et CS′ égales à la corde adjacente CA, et les deux points S et S′ seront les deux centres de *plus grande conversion;* savoir: le premier S, qui tombe sur le prolongement du diamètre, le centre de conversion *maximum positive*, je veux dire le point par lequel, en y présentant un obstacle, on ferait prendre au corps la plus grande rotation possible en *sens contraire* de sa rotation actuelle; et l'autre S′, celui de la conversion *maximum négative*, c'est-à-dire le point par lequel on ferait prendre au corps la plus grande rotation possible, mais dans le *sens même* où il tourne actuellement.

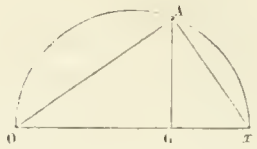
66. Ainsi l'on a, par cette figure si simple et si connue du triangle rectangle avec la perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypoténuse, tout ce qui regarde la position et la dépendance réciproque de ces divers centres que j'ai considérés dans un corps qui tourne sur un de ses axes principaux, tandis que le centre de gravité est emporté dans l'espace suivant une direction perpendiculaire à cet axe. La figure même montre clairement ce qui arrive lorsque le corps n'est animé que d'un seul de ces deux mouvements.

1°. Si le corps n'a reçu que l'impulsion d'une simple force qui passe par son centre de gravité, le centre C de percussion tombe alors au point G; le côté CA se confond avec la perpendiculaire $GA = K$, et l'autre côté AO du triangle rectangle devient parallèle à l'hypoténuse. Le centre T de plus grande percussion *positive* est donc alors au centre de gravité G, comme il est clair que cela doit être; et l'autre centre T′, de plus grande percussion *négative*, en est à une distance *infinie:* et les deux centres de conversion S et S′ tombent à la distance $CA = GA = \pm K$ de ce même centre G.

2°. Si le corps n'a reçu que l'impulsion d'un couple, le centre spontané O tombe au centre de gravité, le côté OA se confond avec la perpendiculaire GA, et le côté AC devient parallèle à l'hypoténuse. Les

deux centres de percussion *maximum* T et T′ sont donc alors à la distance $OA = \pm K$ du centre G; et, des deux centres de conversion S et S′, le premier S est à une distance *infinie*, et le second S′ à une distance *nulle* de ce même centre G.

67. Enfin, si l'on veut considérer dans le corps un point quelconque x pris où l'on voudra sur l'hypoténuse CO, afin de se faire une idée nette



de la force ou de l'action qui appartient à chaque point du corps; qu'on mène la ligne xA qui joint x au sommet de l'angle droit du triangle, et qu'on prenne la fraction $\frac{\overline{AG}^2}{\overline{Ax}^2} \cdot M$ de la masse entière M de ce corps : et l'on pourra dire que le point x agit exactement comme un point libre où cette fraction de la masse se trouverait concentrée. Et l'on peut voir que le point O, qui serait *réciproque* à x, agirait aussi comme un point libre qui serait chargé du reste de cette masse : de sorte que ces deux points réciproques x et O se partagent la masse du corps en deux parties réciproquement proportionnelles à $\overline{xA}^2$ et $\overline{OA}^2$, ou, ce qui est la même chose, en deux parties réciproques à leurs distances OG et xG au centre de gravité G de ce corps.

68. Il nous semble que des vérités si claires et d'une expression si facile sont comme de nouveaux éléments qu'on ajoute à la science et qui ne peuvent manquer de la perfectionner. Car il faut convenir que l'esprit humain ne s'avance guère qu'à l'aide de ces idées plus simples, ou de ces instruments plus commodes qu'il imagine et qu'il manie, pour ainsi dire, avec plus de facilité. J'ai donc pensé que ces questions nouvelles n'étaient pas indignes de l'attention des géomètres, et qu'autant par leur nouveauté que par l'usage dont elles peuvent être en Mécanique, elles méritaient tous ces détails et tous ces développements que je viens de donner dans ce Mémoire.

Mais ces propositions si élégantes ne sont elles-mêmes que des corollaires de propositions plus générales, comme on va le voir dans le chapitre suivant.

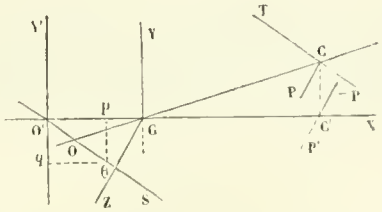
CHAPITRE II.

Suite des questions dynamiques.

§ I.

1. Jusqu'ici nous avons supposé que l'impulsion actuelle qui anime le corps était dirigée dans le plan de deux de ses axes principaux GX et GY, et qu'ainsi la rotation spontanée se faisait autour d'un axe parallèle au troisième axe principal GZ.

Nous allons maintenant considérer le cas où l'impulsion P est donnée dans une direction perpendiculaire au plan des deux axes GX et



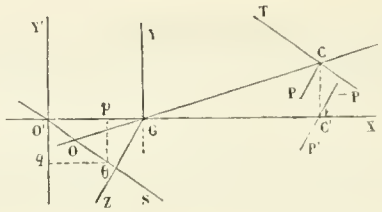
GY, et en un point quelconque C pris dans ce plan et que nous nommerons le centre d'*impulsion*. L'axe spontané de la rotation à laquelle cette impulsion donne naissance, se forme alors dans le plan même de ces deux axes principaux; et si l'on prolonge la ligne CG jusqu'à sa rencontre en O avec l'axe spontané OS, le point O est ce que nous nommerons le centre *spontané* correspondant au centre C. Ces deux centres, comme on va le voir, sont toujours *réciproques* l'un de l'autre, c'est-à-dire que si l'impulsion était donnée en O, le centre spontané se formerait en C, et l'axe spontané CT serait parallèle au premier OS.

La première question qu'il faille ici résoudre est donc la suivante :

Problème I.

Étant donné, dans le plan de deux axes principaux d'un corps, le centre C *d'une impulsion* P *perpendiculaire à ce plan, déterminer l'axe spontané* OS *qui répond à ce centre d'impulsion.*

Solution. Soient, relativement aux deux axes principaux GX et GY que l'on considère, x et y les coordonnées du point C où l'impulsion P est appliquée ; soit m la masse du corps, et désignons par $m\alpha^2$, $m\beta^2$ les moments respectifs de l'inertie de ce corps autour des axes GX et GY.



Si l'on transporte P parallèlement à elle-même de C en C′ sur l'axe GX, C′ étant le pied de l'ordonnée y du point C, on a d'abord un couple, au moment Py, et qui tend à faire tourner sur l'axe GX avec une vitesse angulaire

$$p = \frac{Py}{m\alpha^2} :$$

on a ensuite une force égale et parallèle à la proposée P, mais appliquée en C′ à la distance x du centre de gravité G. Or on a vu que cette force donne lieu à une rotation spontanée autour d'un certain axe O′ Y′ parallèle à GY et situé de l'autre côté du centre G à une distance

$$x' = \frac{\beta^2}{x} ;$$

et l'on a, pour la vitesse angulaire q autour de cet axe,

$$q = \frac{Px}{m\beta^2}.$$

En vertu de l'impulsion donnée en C, le corps tend donc à la fois à tourner sur O′X avec la vitesse angulaire

$$p = \frac{Py}{m\alpha^2},$$

et sur O′Y′ avec la vitesse angulaire

$$q = \frac{Px}{m\beta^2}.$$

Donc, suivant le principe de la composition des rotations, le corps tend à tourner sur la diagonale du rectangle construit sur les deux lignes O′p et O′q qui représenteraient les deux rotations p et q. La force proposée P donne donc lieu à un axe spontané de rotation qui coupe l'axe des x à la distance

$$x' = -\frac{\beta^2}{x}$$

de l'origine G, et qui est incliné sur cet axe d'un angle dont la tangente est

$$-\frac{q}{p} = -\frac{\alpha^2 x}{\beta^2 y};$$

de sorte qu'en nommant t et u les coordonnées courantes de cet axe spontané O′s, on a, pour son équation,

$$u = -\frac{\alpha^2 x}{\beta^2 y}\left(t + \frac{\beta^2}{x}\right),$$

ou plus simplement

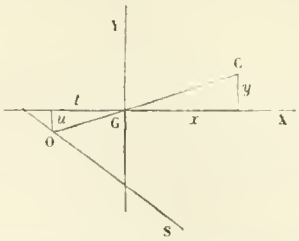
$$\alpha^2 xt + \beta^2 yu + \alpha^2\beta^2 = 0;$$

ce qu'il fallait trouver.

Telle est donc, entre les coordonnées t et u, l'équation de l'axe spontané correspondant à un centre d'impulsion dont les coordonnées sont x et y. C'est ce qu'on pourrait d'ailleurs démontrer de plusieurs manières également simples; mais il est inutile de s'y arrêter.

2. Si l'on considère le point O où le prolongement de CG va couper

l'axe spontané O′ S, point que nous avons nommé le *centre spontané*



de rotation, nous aurons pour les coordonnées u et t de ce point O qui tombe en ligne droite avec C et G,

$$t : u :: x : y;$$

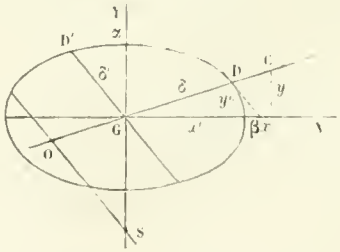
d'où, en combinant cette équation avec la précédente, on tire

$$t = -\frac{\alpha^2\beta^2 x}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2},$$

$$u = -\frac{\alpha^2\beta^2 y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2};$$

expressions qui donnent les coordonnées du centre spontané O par celles du centre d'impulsion C, ou réciproquement; car on y peut changer t en x et u en y, comme dans les deux équations symétriques d'où ces expressions dérivent : ce qui fait voir que les deux centres C et O sont toujours *réciproques* l'un de l'autre.

5. Si l'on nomme H la distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ du centre C d'impulsion au centre de gravité G; et A la distance $\sqrt{t^2 + u^2}$ du centre spontané O



au même point G, on trouvera, en mettant au lieu de t et u leurs va-

leurs en x et y, et faisant le produit AH des distances dont il s'agit, l'équation

$$AH = \alpha^2 \beta^2 \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}.$$

Or, comme dans le second membre x et y ont le même nombre de dimensions au numérateur et au dénominateur, il est permis de mettre au lieu de x et y deux autres lignes quelconques qui leur soient proportionnelles. Si donc on sous-entend ici que x et y désignent maintenant les deux coordonnées du point D où la droite CG irait couper l'ellipse dont l'équation serait

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2.$$

et que nous nommerons l'ellipse *centrale*, le second membre de notre équation précédente se réduit simplement à $x^2 + y^2$; mais $x^2 + y^2$ représente alors le carré δ^2 du demi-diamètre GD que détermine dans l'ellipse centrale la direction donnée de CG; on a donc entre les distances A et H des deux centres réciproques O et C, au centre de gravité G, l'équation remarquable

$$AH = \delta^2,$$

δ étant, dans l'ellipse centrale, la longueur du demi-diamètre dont la direction passe par les deux points dont il s'agit.

Cette direction du diamètre 2δ est inclinée sur l'axe des abscisses x, d'un angle dont la tangente est $\frac{y}{x}$: la direction de OS est inclinée au même axe d'un angle dont la tangente est $-\frac{\alpha^2 x}{\beta^2 y}$, et le produit de ces deux tangentes est $-\frac{\alpha^2}{\beta^2}$: donc, en considérant l'ellipse centrale dont l'équation est

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

on peut dire que l'axe spontané OS est toujours *parallèle* au diamètre δ' *conjugué* au diamètre δ dont la direction va passer par le centre C de l'impulsion donnée au corps.

4. Les *bras de l'inertie* de ce corps, autour des axes principaux res-

pectifs GX et GY, ayant été nommés α et β, on voit, par la forme de l'équation de notre ellipse, que β est la longueur du demi-axe principal sur lequel on compte les x, et α celle du demi-axe où l'on compte les y; et comme, en faisant le rectangle

$$\alpha\beta = const. = R^2,$$

on a évidemment

$$\alpha = \frac{R^2}{\beta} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{R^2}{\alpha},$$

on voit que cette ellipse centrale est de telle nature, que ses deux axes sont, non pas en raison directe, mais en raison inverse des bras de l'inertie du corps autour des mêmes axes. Et il est bien aisé de voir, par la formule connue qui donne le moment d'inertie autour d'un axe quelconque, que cette propriété relative aux deux axes principaux s'étend à tous les diamètres; de sorte que le bras de l'inertie du corps autour d'un diamètre quelconque est *réciproque* à la longueur de ce diamètre.

5. Si donc on nomme K le bras de l'inertie autour du diamètre δ' qui est parallèle à l'axe spontané OS, on aura

$$K = \frac{R^2}{\delta'} = \frac{\alpha\beta}{\delta'}:$$

mais dans l'ellipse on a le rectangle

$$\alpha\beta = \delta\delta' \sin\varphi,$$

en désignant par φ l'inclinaison mutuelle des deux diamètres conjugués δ et δ'; et de là résulte

$$K = \delta \sin\varphi$$

pour le bras de l'inertie du corps autour du diamètre conjugué à δ: c'est la distance du bout de ce dernier diamètre à son conjugué δ'.

L'équation trouvée plus haut

$$AH = \delta^2,$$

devient donc

$$A \sin\varphi \,.\, H \sin\varphi = K^2;$$

d'où l'on voit que les deux centres réciproques C et O sont à des dis-

tances $H \sin \varphi$ et $A \sin \varphi$ du diamètre GD′ parallèle à OS, telles que le produit de ces distances fait le carré du bras de l'inertie du corps autour du même diamètre : ce qui est une proposition toute semblable à celle qu'on a démontrée dans le chapitre précédent, mais qui est plus générale et qui la renferme comme un cas particulier.

Corollaire I.

6. On vient de faire voir que x et y étant les coordonnées d'un point quelconque C regardé comme un *centre d'impulsion*, et t et u désignant les coordonnées courantes de l'axe *spontané* OS qui répond à ce centre C, on a, pour l'équation de cette droite OS,

$$\alpha^2 xt + \beta^2 yu + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

Maintenant, si l'on suppose que le centre C change de place, et que par conséquent ses deux coordonnées x et y varient, il est clair que la droite OS changera de position. On pourrait donc demander quelle relation il faudrait établir entre les variables x et y pour que l'axe spontané OS passât toujours par un même point O aux coordonnées u' et t'. Or il est évident que pour avoir cette relation, il suffit d'écrire que l'équation précédente est toujours satisfaite pour les coordonnées $t = t'$, $u = u'$ du point donné O ; d'où résulte pour la relation cherchée entre x et y,

$$\alpha^2 t' x + \beta^2 u' y + \alpha^2 \beta^2 = 0 ;$$

c'est l'équation d'un axe spontané CT qui répondrait au point O considéré comme centre de percussion.

Ainsi, pour que ces divers centres de percussion C, C′, C″, etc., puissent donner lieu à divers axes spontanés qui se croisent en un même point O, il faut que tous ces centres soient pris sur une ligne droite CT qui répond, comme axe spontané, au point donné O regardé comme centre de percussion.

Remarque.

7. Comme tous les points d'un axe spontané OS demeurent en re-

pos au premier instant, on voit qu'en frappant au centre C, on ne cause aucune percussion non-seulement sur le centre réciproque O, mais encore sur aucun des points de l'axe spontané OS.

Et réciproquement, si l'on frappe en O, on ne cause aucune percussion sur aucun point de l'axe parallèle CT.

Corollaire II.

8. De là et du corollaire qui précède, on peut conclure ce théorème remarquable : c'est que si l'on frappe en un point quelconque C′ pris où l'on voudra sur la droite CT, on ne causera aucune percussion sur le centre spontané O, parce que l'axe spontané O′S′ qui répondrait à C′ ira toujours passer par le point O.

Et réciproquement, si l'on frappe en un point quelconque pris sur l'axe spontané OS, on ne causera aucune percussion sur le centre C.

Corollaire III.

9. On pourrait faire sur ces centres et ces axes correspondants diverses questions analogues à la précédente, et qu'on résoudrait avec la même facilité.

Et par exemple, on pourrait demander sur quelle courbe doivent être rangés les centres de percussions pour que les axes spontanés correspondants soient tous tangents à une courbe donnée.

Soit

$$u = f(t)$$

l'équation de cette courbe donnée; et

$$\alpha^2 xt + \beta^2 yu + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

celle de l'axe spontané correspondant au centre C dont les coordonnées sont x et y.

Le contact de cette ligne droite avec la courbe exige que la fonction différentielle $\frac{du}{dt}$ tirée de l'une ou de l'autre de ces deux équations, ait la même valeur au point de contact; ce qui donne cette troisième équation

$$\alpha^2 x + \beta^2 y . f'(t) = 0.$$

Si donc de l'une de ces équations on chasse t et u, au moyen des deux autres, il restera entre x et y une équation qui donnera le lieu cherché des centres C.

Supposons le cas particulier où la courbe donnée $u = f(t)$ serait une parabole au sommet G, à l'axe GY, et dont le paramètre serait $= A$; on aurait

$$Au = t^2,$$

$$\alpha^2 xt + \beta^2 yu + \alpha^2 \beta^2 = 0,$$

$$A\alpha^2 x + \beta^2 y . 2t = 0,$$

d'où, éliminant t et u, il viendrait pour le lieu des centres C

$$4\beta^4 . y = A\alpha^2 . x^2;$$

ce qui est aussi une parabole de même axe et de même sommet, mais dont le paramètre A′ est égal à $\frac{4\beta^4}{A\alpha^2}$.

Ainsi, quand les centres de percussion seront rangés sur cette parabole, tous les axes spontanés correspondants seront tangents à l'autre parabole donnée.

S'il arrivait que A fût donné égal à $\frac{2\beta^2}{\alpha}$, il viendrait $A' = A$, et les deux paraboles se confondraient en une seule : de sorte que les centres étant pris sur une des branches de cette parabole, tous les axes spontanés seraient tangents à l'autre branche de cette même parabole.

Corollaire IV.

10. Par la même analyse, il est évident qu'on résoudrait cette question inverse de la précédente, où l'on donnerait la courbe qui fait le lieu des centres de percussion, et où l'on demanderait la courbe que les axes spontanés forment par leurs points d'intersection successifs, et dont ces axes sont par conséquent les tangentes.

Car x et y étant toujours les coordonnées de l'un quelconque de ces centres C, l'axe spontané correspondant a pour équation

$$(1) \qquad \alpha^2 xt + \beta^2 yu + \alpha^2 \beta^2 = 0;$$

or, si l'on fait varier infiniment peu x et y, en regardant t et u comme constantes, ce qui donne

$$(2) \qquad \alpha^2 t + \beta^2 u . \frac{dy}{dx} = 0,$$

ces deux équations entre u et t ne conviennent plus qu'au point d'intersection des deux axes spontanés qui répondent aux deux centres infiniment voisins. Mais le lieu des centres étant donné par hypothèse, on aura entre x et y une équation donnée

$$y = f(x),$$

d'où l'on tirera

$$\frac{dy}{dx} = f'(x);$$

de sorte que, substituant ces deux valeurs dans les deux équations précédentes (1) et (2), et chassant x, on aura entre t et u une équation

$$u = \psi(t),$$

qui donnera la courbe cherchée que forment les axes spontanés par la suite de leurs intersections, et dont ils sont comme les tangentes.

11. Si, par exemple, le lieu donné des centres est une parabole représentée par

$$A y = x^2.$$

on trouvera, pour la courbe cherchée,

$$\frac{4\beta^2}{A\alpha^2} \cdot u = t^2,$$

ce qui est aussi une parabole dont le paramètre est, comme on voit, *réciproque* au paramètre A de la première; de sorte que si A était donné égal à $2\frac{\beta^2}{\alpha}$, les deux paraboles n'en feraient qu'une seule, ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on a vu dans le corollaire qui précède.

12. Si les centres étaient pris sur le contour de l'ellipse centrale, dont l'équation est

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

on trouverait pour la courbe enveloppée par les axes spontanés correspondants

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

ce qui est la même ellipse; et ce qui doit être, puisque chaque centre étant par hypothèse au bout d'un diamètre, l'axe spontané correspondant n'est autre chose que la tangente menée par l'autre bout.

13. Si le lieu des centres était la circonférence d'un cercle donnée par l'équation

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

on trouverait pour la courbe cherchée l'équation

$$\frac{t^2}{\beta^4} + \frac{u^2}{\alpha^4} = \frac{1}{R^2};$$

c'est une ellipse, aux axes respectifs $\frac{\beta^2}{R}$, $\frac{\alpha^2}{R}$ dirigés suivant les axes β et α de l'ellipse centrale, mais de longueurs proportionnelles aux carrés de ces mêmes axes.

Etc. Etc.

Corollaire V.

14. Les questions relatives à la position mutuelle des centres C et O de percussion et de rotation spontanée, sont encore plus simples et plus faciles que les précédentes; car en désignant toujours par x et y les coordonnées du point C, et par t et u celles du centre réciproque O, on a entre les coordonnées de ces deux points les deux équations

$$x = -\frac{\alpha^2 \beta^2 t}{\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2},$$

$$y = -\frac{\alpha^2 \beta^2 u}{\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2}.$$

Si donc, les centres C étant pris sur une courbe quelconque donnée par l'équation

$$y = f(x),$$

on demande le lieu des centres spontanés O qui leur correspondent, on

n'aura qu'à mettre dans cette équation, au lieu de x et y, leurs valeurs précédentes, et l'on obtiendra sur-le-champ entre u et t l'équation qui donne le lieu cherché des centres O.

Et réciproquement, si l'on donnait le lieu de ces centres spontanés, on trouverait, par les expressions réciproques aux précédentes, le lieu cherché des centres C.

15. Supposons que les centres C soient pris sur une même ligne droite, qu'on peut toujours représenter par une équation de cette forme,

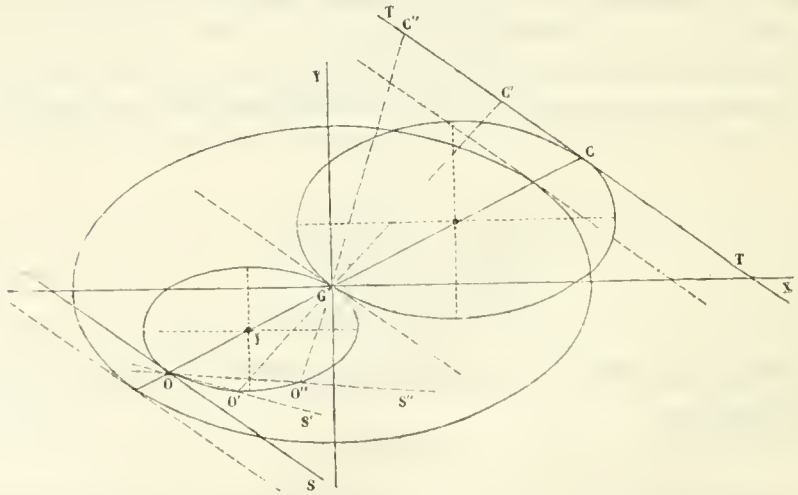
$$\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2 = 0,$$

en donnant aux deux coefficients arbitraires a et b des valeurs convenables.

Si l'on met dans cette équation, au lieu de x et y, leurs valeurs en t et u, on aura, pour le lieu des centres spontanés O correspondants, l'équation

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 - \alpha^2 at - \beta^2 bu = 0;$$

c'est une ellipse toute semblable à l'ellipse *centrale*, posée de même, mais dont le centre est au point I dont les coordonnées seraient $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$,



et dont la circonférence passe par l'origine G. Or la droite CT ayant

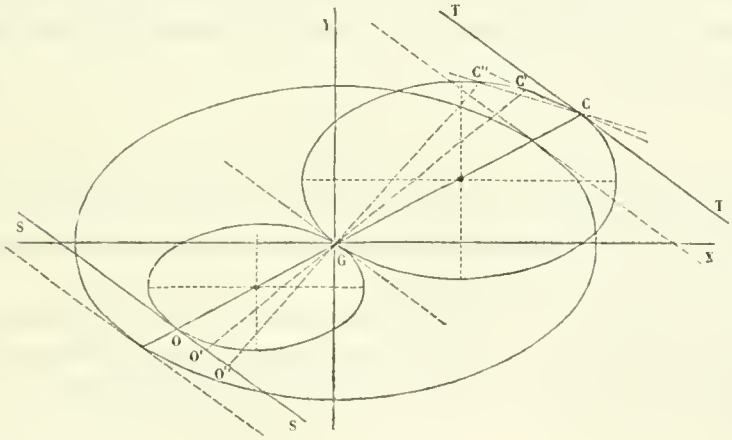
été représentée par l'équation

$$\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2 = 0,$$

on voit que cette droite peut être regardée comme un axe spontané correspondant à un centre O dont les coordonnées seraient a et b. Le centre I de notre ellipse est donc au milieu de la ligne GO; et cette ellipse est construite sur GO comme diamètre homologue au diamètre de même direction dans l'ellipse centrale.

16. Ainsi, *en regardant la droite donnée* CT *comme un axe spontané correspondant à un centre* O, *on peut dire que si tous les centres de percussion sont pris sur cette droite, tous les centres spontanés correspondants sont rangés sur une ellipse, semblable à l'ellipse centrale et décrite sur la ligne* GO *comme diamètre homologue à celui que la direction de* GO *détermine dans cette ellipse centrale.* Et réciproquement, *si tous les centres de percussion étaient pris sur le contour de cette ellipse, tous les centres spontanés seraient rangés sur la droite* CT.

On voit de même que si les centres de percussion étaient pris sur la droite OS parallèle à CT, les centres spontanés correspondants seraient



sur une ellipse semblable à la première, mais décrite sur le diamètre CG comme diamètre homologue de OG. Tout cela est manifeste par la réciprocité des deux centres C et O.

17. Supposons maintenant, pour donner un second exemple, que les centres C soient pris sur la parabole représentée par l'équation

$$y^2 = \mathrm{A}\,x\,;$$

on trouvera, en mettant au lieu de x et y leurs valeurs en u et t, l'équation

$$\mathrm{A}\,\alpha^2\,t^3 + \mathrm{A}\,\beta^2\,u^2\,t + \alpha^2\,\beta^2\,u^2 = 0,$$

qui donne le lieu cherché des centres spontanés O correspondants aux centres C.

Cette équation résolue par rapport à l'ordonnée u donne

$$u = \pm\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{-\mathrm{A}\,t^3}{\alpha^2 + \mathrm{A}\,t}};$$

d'où l'on voit (à cause de α, β et A *positifs*), que cette courbe du troisième ordre n'a d'ordonnées réelles u que du côté des abscisses t *négatives*, comme il est clair que cela doit être ; que cette courbe a, comme la parabole ($y^2 = \mathrm{A}\,x$), deux branches égales qui vont à l'infini au-dessus et au-dessous du même axe des abscisses, mais que ces deux branches ne peuvent s'éloigner de l'axe des ordonnées à une distance plus grande que

$$t' = -\frac{\alpha^2}{\mathrm{A}}:$$

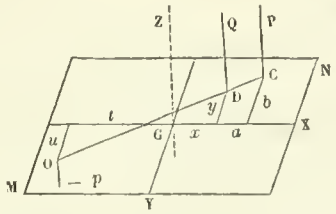
de sorte qu'en menant, à cette distance t', une parallèle à l'axe des ordonnées, cette droite est la commune asymptote des deux branches infinies de la courbe dont il s'agit.

On pourrait faire beaucoup d'autres questions du même genre; mais ces exemples suffisent, et nous allons passer à un problème plus important et dont on peut tirer de nombreuses conséquences.

§ II.

Problème II.

18. *Soit toujours* P *la force d'impulsion donnée au corps suivant une direction perpendiculaire au plan de deux de ses axes principaux* GX *et* GY; *on demande la quantité* Q *de la percussion que ce corps*



produirait contre un obstacle ou point fixe qu'on viendrait à lui présenter tout à coup en un point quelconque D *pris dans le plan des mêmes axes.*

Solution. Soit C le point de ce plan où l'impulsion P est appliquée : joignez CD, et sur le prolongement de cette ligne, supposez un point O tellement choisi que, si l'on frappait en O, on ne pût causer aucune percussion sur le point D. Il est clair que, si l'on décompose la force P en deux autres forces parallèles, l'une Q appliquée en D, l'autre p appliquée en O, la percussion cherchée sur le point D sera représentée simplement par la composante Q qui s'y trouve immédiatement appliquée; car l'autre composante p qui frappe en O ne causera, par hypothèse, aucune percussion sur le point D. Ainsi l'on aura, par le seul principe de la composition des forces parallèles,

$$Q = P.\frac{CO}{DO},$$

pour l'expression de la percussion cherchée Q sur le point D dont il s'agit.

Il ne reste donc, pour résoudre le problème, qu'à déterminer la position du point O par celles des deux points C et D.

Or, en premier lieu, le point O étant sur la droite qui passe par C et D, si l'on nomme a et b les coordonnées du point C, x et y celles du

point D, et t et u celles du point O, il faut qu'on ait l'équation

$$u - y = \frac{b-y}{a-x}(t-x).$$

En second lieu, si le point O est bien choisi, il faut qu'en frappant en O on trouve un axe spontané qui passe par le point D, afin que ce dernier point n'en ressente aucune percussion : il faut donc qu'on ait cette seconde équation

$$\alpha^2 tx + \beta^2 yu + \alpha^2 \beta^2 = 0.$$

Combinant ces deux équations pour en tirer les valeurs de t et u en fonction de x, y, a, b, on trouvera

$$t = \beta^2 \frac{\alpha^2(x-a) + y(bx-ay)}{\alpha^2 ax + \beta^2 by - \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2};$$

et l'on aura de même, sans autre calcul, mais en changeant simplement x en y, a en b, α en β,

$$u = \alpha^2 \frac{\beta^2(y-b) + x(ay-bx)}{\alpha^2 ax + \beta^2 by - \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2};$$

mais ici l'une ou l'autre de ces expressions nous suffit : car, comme on a

$$Q = P.\frac{CO}{DO},$$

et que le rapport des deux lignes CO et DO est le même que celui de leurs projections sur l'un ou l'autre des deux axes coordonnés, on aura, en projetant par exemple sur l'axe des abscisses, $\frac{a+t}{x+t}$ pour l'expression du rapport dont il s'agit; d'où résulte simplement

$$Q = P.\frac{a+t}{x+t}.$$

Mettant donc, à la place de t, sa valeur précédente, on trouvera, tout calcul fait, cette élégante formule

$$(A) \qquad Q = P\frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2}.$$

C'est l'expression de la force Q avec laquelle un corps, animé d'une impulsion P perpendiculaire à l'un de ses plans principaux, peut frapper un obstacle fixe qu'on viendrait à lui présenter en un point quelconque D du même plan.

Corollaire I.

19. On voit d'abord que cette percussion Q est nulle pour tous les points où l'on aurait

$$\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2 = 0,$$

c'est-à-dire pour tous les points de l'axe spontané OS qui répondrait au centre de l'impulsion C.

On voit ensuite que cette percussion Q est égale à la force P elle-même lorsqu'on a

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 ax + \beta^2 by;$$

d'où résulte que le corps frappe avec la même force P, non-seulement par le centre C de l'impulsion et par le centre de gravité G, mais encore par tous les points de la circonférence de l'ellipse décrite sur la ligne CG avec deux axes parallèles et proportionnels aux axes α et β de l'ellipse centrale du corps.

Corollaire II.

Du centre de percussion maximum.

20. Si l'on veut trouver les coordonnées x et y du point D où la percussion Q est un *maximum*, on n'a qu'à poser les deux équations

$$\frac{dQ}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dy} = 0,$$

ce qui donne

$$\alpha^2 a (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2) - 2\alpha^2 x (\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2) = 0,$$
$$\beta^2 b (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2) - 2\beta^2 y (\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2) = 0,$$

d'où résulte immédiatement la proportion

$$x : y :: a : b;$$

ce qui fait voir d'abord que le point cherché D se trouve sur la direction de la ligne CG qui joint le centre d'impulsion au centre de gravité du corps. Mettant donc, dans l'une ou l'autre des deux équations précédentes, au lieu de y sa valeur $\frac{b}{a}x$, et puis au lieu de x sa valeur $\frac{a}{b}y$, on aura, pour déterminer séparément ou x ou y, les deux équations du second degré

$$(\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2) x^2 + 2\alpha^2 \beta^2 a x - \alpha^2 \beta^2 a^2 = 0,$$
$$(\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2) y^2 + 2\alpha^2 \beta^2 b y - \alpha^2 \beta^2 b^2 = 0;$$

équations toutes semblables, dont la première donne la seconde en y changeant simplement x et a en y et b, ou réciproquement, comme cela doit être.

21. Mais, comme le point cherché D est sur la droite donnée CG, prenons pour inconnue la distance $v = \mathrm{DG}$ de ce point au centre G; nous aurons, en faisant

$$\mathrm{CG} = \sqrt{a^2 + b^2} = \mathrm{H},$$

la proportion

$$v : \mathrm{H} :: x : a, \quad \text{ou} \quad :: y : b,$$

ce qui donne

$$x = \frac{a}{\mathrm{H}} v, \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{\mathrm{H}} v;$$

et mettant au lieu de x et y ces valeurs dans les équations qui précèdent, on aura, pour déterminer l'inconnue v, l'équation

$$v^2 + 2\mathrm{H} \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} \cdot v - \mathrm{H}^2 \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} = 0;$$

or, en nommant A la distance du centre spontané O au centre de gravité G, on a l'équation

$$\frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}},$$

parce que le premier membre exprime (**2**) le rapport des abscisses ou des ordonnées des deux points réciproques C et O, et que ce rapport est évidemment le même que celui des deux lignes H et A.

En prenant donc cette expression plus simple, on a, pour déterminer v, l'équation

$$v^2 + 2Av - AH = 0,$$

laquelle donne

$$v = -A \pm \sqrt{A^2 + AH}:$$

valeur double qui fait voir qu'il y a deux centres de percussion *maximum*, l'un à droite et l'autre à gauche du centre de gravité G.

Si l'on veut rapporter ces deux points au centre *spontané* O de la rotation du corps, on n'a qu'à faire

$$DO = \lambda = v + A;$$

et désignant, pour abréger, la ligne $OC = A + H$ par la lettre L, on aura

$$\lambda = \pm \sqrt{AL},$$

d'où résulte ce théorème :

Le centre de percussion maximum *est sur la droite qui passe par le centre d'impulsion et le centre de gravité du corps; et sa distance* λ *au centre* spontané *de rotation est moyenne géométrique entre les distances du centre de gravité et du centre d'impulsion au même centre* spontané. Théorème tout semblable à celui qu'on a trouvé dans le cas particulier où la rotation spontanée a lieu autour d'un axe parallèle à l'un des trois axes principaux du corps.

22. Quant à la valeur (Q) de la percussion *maximum*, elle est exprimée par

$$(Q) = P\,\frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2}:$$

c'est ce qu'on trouvera facilement par l'expression générale de Q en y mettant d'abord, au lieu de x et y, leurs valeurs en u; et puis, au lieu de u, sa valeur

$$u = -A \pm \sqrt{A^2 + AH},$$

qui convient au *maximum*.

La première valeur (Q), qui est positive, répond au centre D qui

tombe entre C et G; elle donne une percussion de *même sens* que l'impulsion P, et toujours *plus grande* que P.

La seconde valeur (Q), qui est négative, répond au second centre D′ de percussion *maximum*, lequel tombe de l'autre côté du centre spontané O et à la même distance que le premier D : elle donne une percussion de *sens contraire* à l'impulsion P qui anime le corps, et toujours *plus petite* que cette impulsion.

Corollaire III.

Des points où le corps est capable d'une même percussion.

25. Si l'on cherche les points où le corps peut frapper avec une même force donnée nP, on n'aura qu'à faire dans l'expression générale de Q,

$$Q = nP,$$

et l'on aura, pour le lieu de ces points, l'équation

$$n(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2) = \alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2,$$

ou bien, en transportant l'origine des coordonnées x et y au point qui répond à $x = \frac{a}{2n}$ et $y = \frac{b}{2n}$; et désignant les coordonnées nouvelles par X et Y, on aura

$$4n^2(\alpha^2 X^2 + \beta^2 Y^2) = \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - 4\alpha^2\beta^2(n^2 - n),$$

ou, en termes plus simples,

$$4n^2\left(\frac{X^2}{\beta^2} + \frac{Y^2}{\alpha^2}\right) = \frac{H}{A} - 4(n^2 - n).$$

Si le second membre de cette équation est positif, la courbe est évidemment une ellipse semblable à l'ellipse centrale, posée de même, mais ayant son centre au point qui répond à l'abscisse $x = \frac{a}{2n}$, et à l'ordonnée $y = \frac{b}{2n}$.

Si le second membre est nul, la courbe se réduit à un point unique. Et l'on peut remarquer que ce point est précisément celui qui fait le

centre de la percussion maximum : car poser l'égalité

$$\frac{H}{A} - 4(n^2 - n) = 0,$$

c'est prendre pour n un de ces deux nombres,

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2},$$

et par conséquent c'est supposer que la percussion donnée nP a l'une ou l'autre de ces deux valeurs,

$$Q = P\frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2}:$$

or, ce sont précisément les valeurs des deux percussions maximum : l'une positive, qui répond au maximum des percussions de même sens que l'impulsion P; et l'autre négative, qui répond au maximum des percussions en sens contraire.

Enfin, si le second membre de notre équation est négatif, l'ellipse est imaginaire, et il n'y a pas de centres de la percussion donnée nP.

Ainsi la courbe des centres d'égale percussion nP est une ellipse semblable à l'ellipse centrale, ou un point unique, ou une courbe imaginaire, selon qu'on a

$$H - 4A(n^2 - n) > 0, \quad \text{ou} \quad = 0, \quad \text{ou} \quad < 0.$$

24. Il est aisé de voir pourquoi, dans ce dernier cas, il n'y a pas de point capable de la percussion nP. Car supposer le trinôme

$$H - 4A(n^2 - n)$$

négatif, c'est supposer, dans le cas de n positif, qu'on prend ce nombre n supérieur à $\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{H}{A}}}{2}$, et qu'ainsi on demande le centre d'une percussion positive nP qui surpasse le maximum de ces percussions positives; ce qui est impossible. Et de même, dans le cas de n néga-

tif, c'est supposer qu'on prend la valeur absolue de ce nombre supérieure à $\frac{-1+\sqrt{1+\frac{H}{A}}}{2}$; et qu'ainsi on demande le centre d'une percussion négative qui surpasse le maximum de ces percussions négatives; ce qui est également impossible.

Corollaire IV.

Cas particuliers des théorèmes qui précèdent.

25. Si dans l'expression générale de Q, qui est (**18**)

$$Q = P\,\frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2},$$

on suppose $a = 0$, $b = 0$, on a le cas particulier où l'impulsion P passe par le centre de gravité G du corps, et par conséquent le cas où le corps n'est animé que d'un pur mouvement de translation suivant son axe principal GZ.

Dans ce cas particulier, on a donc, pour la percussion dont le corps est capable par un point quelconque du plan principal XY,

$$Q = P\,\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2},$$

dont le maximum répond à $x = 0$ et $y = 0$: de sorte que le centre de percussion maximum est alors au centre de gravité même, comme il est clair que cela doit être.

26. Quant à la courbe formée par les points d'égale percussion donnée nP, elle sera représentée par

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2\beta^2\left(\frac{1}{n} - 1\right):$$

d'où l'on voit que tous ces points sont rangés sur une ellipse semblable à l'ellipse centrale, décrite autour du même centre, et posée de la même manière. Pour la grandeur de cette ellipse, elle dépendra de la valeur constante nP qu'on voudra donner à Q; valeur qu'il faut pourtant supposer toujours prise au-dessous de P, puisque P est ici la plus grande force de percussion dont le corps soit capable.

Si l'on suppose, par exemple,

$$Q = \frac{1}{2} P,$$

on aura

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

équation de l'ellipse centrale elle-même : d'où l'on voit que le contour de cette ellipse est le lieu des points par lesquels le corps frappe avec la moitié de la force d'impulsion qui l'anime.

Corollaire V.

Du cas particulier où le corps n'est animé que par l'impulsion d'un couple.

27. Mettons l'expression générale de Q sous la forme

$$Q = Pa \frac{\alpha^2 x + \frac{b}{a} \beta^2 y + \frac{\alpha^2 \beta^2}{a}}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2},$$

et supposons qu'on y fasse

$$P = 0, \quad a = \infty, \quad b = \infty,$$

mais de manière que le rapport $\frac{b}{a}$ reste toujours le même, et que les produits ou moments Pa et Pb gardent toujours les mêmes valeurs finies que si P, a et b n'avaient pas changé : on aura le cas particulier où le corps ne serait animé que par l'impulsion d'un couple (P, — P) au bras de levier $CG = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On a donc alors, pour exprimer la percussion dont le corps est capable par un quelconque de ses points aux coordonnées x et y, la formule

$$Q = P \frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

C'est au reste ce qu'on peut vérifier en cherchant d'une manière directe la percussion dont le corps est capable quand il n'est animé que par l'impulsion du couple dont il s'agit.

Mais c'est ce qu'on peut aussi déduire de l'expression (A), sans passer par ces valeurs singulières de P nulle avec a et b infinies, qui laissent toujours dans l'esprit quelque chose d'obscur : cette marche nouvelle est bien simple.

28. Et en effet, si la percussion due à une force unique P appliquée en C aux coordonnées a et b est exprimée par

$$P\,\frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2},$$

la percussion due à une force unique $-$ P, égale, parallèle et contraire, mais appliquée en C′ aux coordonnées a' et b', sera exprimée par

$$-\,P\,\frac{\alpha^2 a'x + \beta^2 b'y + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2};$$

donc, en réunissant les deux forces, la percussion totale due à leur ensemble, c'est-à-dire au couple (P, $-$ P), sera exprimée par

$$\text{(B)} \qquad Q = P\,\frac{\alpha^2(a-a')x + \beta^2(b-b')y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2},$$

expression qui, dans le cas de a' et b' nulles, coïncide avec la précédente et la confirme, puisque, dans ce cas, elle doit répondre à la percussion du couple dont le bras de levier CC′ se confond avec CG.

29. Comme un couple peut toujours être transporté dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, et transformé en une infinité d'autres de même moment, sans que son effet sur le corps en soit changé, il est évident que la percussion Q due à l'action de ce couple doit toujours rester la même de quelque manière permise que ce couple ait été représenté dans la figure. C'est en effet ce que donne aussi l'expression précédente (B), où l'on voit que la valeur de Q ne dépend point des cinq valeurs particulières de P, a, b, a' et b', mais uniquement des deux produits $P(a-a')$, $P(b-b')$, qui sont les moments respectifs du couple proposé autour des axes des y et x. Il est donc plus convenable ici de ne conserver dans la formule (B) que ces deux moments, et de les désigner par de simples lettres L et M qui suffisent

pour marquer à la fois la grandeur et la position du couple donné que l'on considère. De cette manière, l'expression (B) devient

$$(B') \qquad Q = \frac{L\alpha^2 x + M\beta^2 y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2},$$

expression plus nette, en ce qu'on n'y voit que les données nécessaires de la question.

Avant d'aller plus loin, on peut faire encore une petite remarque.

30. On a vu plus haut (**28**) comment, de la formule (A) relative à l'impulsion d'une force *unique*, on pouvait conclure la formule (B) relative à l'impulsion d'un *couple*. Or on peut voir réciproquement que, de celle-ci supposée connue (et il serait facile de la démontrer d'une manière directe), on pourrait aussi conclure la première. Et en effet, soit à chercher la percussion Q dont le corps est capable par un point quelconque D aux coordonnées x et y, en vertu d'une impulsion unique P qu'il a reçue au point C dont les coordonnées sont a et b. Je puis considérer que la simple force P appliquée en C est décomposée en une autre égale, parallèle et de même sens appliquée en D, et en un couple (P, — P) appliqué sur CD : or la force appliquée sur le point D y cause évidemment une percussion égale à P; et le couple, de son côté, cause sur le même point une percussion qui, d'après la formule (B), est égale à $P\frac{\alpha^2(a-x)x + \beta^2(b-y)y}{\alpha^2 x^2 + \beta y^2 + \alpha^2\beta^2}$. On a donc, pour la percussion cherchée Q, qui est égale à la somme de ces deux-là,

$$Q = P\frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2},$$

ce qui est précisément la formule (A) que nous avons démontrée au commencement.

Mais revenons au cas où le corps n'est animé que par un couple.

Du centre de percussion maximum.

31. La percussion due à un couple dont les deux moments, autour des deux axes principaux α et β, sont L et M, étant exprimée par

$$Q = \frac{L\alpha^2 x + M\beta^2 y}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2};$$

si l'on cherche les coordonnées x et y du centre D où la percussion est un *maximum*, on n'aura qu'à poser les deux équations

$$\frac{dQ}{dx} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dQ}{dy} = 0,$$

et l'on trouvera

$$x = L \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 L^2 + \beta^2 M^2}},$$

$$y = M \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 L^2 + \beta^2 M^2}};$$

ces deux équations donnent $x : y :: L : M$, et

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2.$$

Ainsi le centre de percussion *maximum* est à la fois sur l'ellipse centrale et sur la trace du plan du couple supposé conduit par l'origine G. Il est donc à l'un et à l'autre bout du diamètre 2δ déterminé par le plan du couple.

Quant à la valeur de cette percussion *maximum*, et que je désignerai par (Q), elle est, d'après les équations précédentes,

$$(Q) = \frac{\sqrt{\alpha^2 L^2 + \beta^2 M^2}}{2\alpha\beta};$$

ou si l'on veut, à cause de

$$\delta^2 = x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2\beta^2(L^2 + M^2)}{\alpha^2 L^2 + \beta^2 M^2},$$

elle est exprimée plus simplement par

$$(Q) = \frac{\sqrt{L^2 + M^2}}{2\delta},$$

ce qui est le moment du couple d'impulsion, divisé par la longueur du diamètre parallèle au plan de ce couple.

Ainsi, quand un corps n'est animé que par l'impulsion d'un couple perpendiculaire à l'un de ses trois plans principaux, ou, ce qui revient au même, quand il tourne actuellement sur un diamètre $2\delta'$ de l'ellipse centrale décrite dans ce plan, le point où il frappe avec le plus de

violence est à l'un des deux bouts du diamètre 2δ conjugué à $2\delta'$: à l'autre bout, le corps frappe avec la même force, mais dans un sens contraire.

Et la grandeur de cette percussion est mesurée par celle du couple divisée par le diamètre 2δ que le plan de ce couple détermine dans l'ellipse centrale du corps.

32. On peut, au reste, rapprocher ce théorème du précédent (**20**), et les envelopper tous deux sous la même expression. Car, sans distinguer les deux sortes d'impulsion que le corps a pu recevoir, pour ne considérer que le mouvement qui l'anime, il est clair que dans l'un et l'autre cas il ne s'agit que d'un corps qui tourne actuellement sur un axe spontané OS situé dans un de ses plans principaux. Or, en cherchant le centre de percussion maximum, on a trouvé (n° **20**) que ce centre D était situé sur la direction GO du diamètre δ conjugué à la direction de l'axe spontané ; et que sa distance au point O étant désignée par λ, on avait

$$\lambda = \pm\sqrt{A^2 + AH};$$

ou, à cause de $AH = \delta^2$ (n° **3**),

$$\lambda = \pm\sqrt{A^2 + \delta^2},$$

où la lettre A désigne la distance GO.

Mais en nommant φ l'inclinaison du diamètre δ à l'axe spontané OS, ou au diamètre conjugué δ' qui lui est parallèle, on a $\delta \sin\varphi$ pour le bras de l'inertie du corps autour de δ' ; et par conséquent

$$\sqrt{\delta^2 \sin^2\varphi + A^2 \sin^2\varphi}$$

pour le bras de l'inertie du même corps autour de OS : on a donc, en désignant comme à l'ordinaire cette ligne par K,

$$\lambda \sin\varphi = \sin\varphi\sqrt{A^2 + \delta^2} = K.$$

D'où l'on peut dire en général que si un corps est actuellement animé d'un mouvement de rotation sur un axe spontané situé comme on vou-

dra dans l'un de ses trois plans principaux, les deux points de ce plan par lesquels le corps peut frapper avec la plus grande force possible sont, l'un à droite et l'autre à gauche de cet axe spontané, à une même distance $\pm \lambda \sin \varphi$ qui est précisément égale au bras K de l'inertie du corps autour du même axe. Et d'ailleurs ces deux points sont situés sur la direction du diamètre conjugué à la direction de l'axe spontané dans l'ellipse centrale du corps; ce qui détermine complétement la position de ces deux centres de percussion maximum.

Voilà un théorème qui convient à toutes les positions que l'axe spontané pourrait avoir dans le plan principal que l'on considère. Si cet axe passe par le centre de gravité du corps, ce qui est le cas particulier de l'article précédent, on a $A = 0$, et la distance $\lambda \sin \varphi = K$ devient $\pm \delta \sin \varphi$, comme on l'avait trouvé dans cet article.

Corollaire VI,

où l'on donne une nouvelle expression de la force Q dont chaque point se trouve doué en vertu de la rotation du corps.

55. En nommant a et b les coordonnées du point C où le corps a reçu l'impulsion P qui l'a mis en mouvement, et x et y les coordonnées du point quelconque D dont on cherche la force Q pour frapper un obstacle, nous avons trouvé

$$Q = P \frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Actuellement, je suppose que du point D, aux coordonnées x et y, on abaisse une perpendiculaire sur l'axe spontané OS dont l'équation est

$$\alpha^2 at + \beta^2 bu + \alpha^2 \beta^2 = 0;$$

on trouvera, en nommant π la longueur de cette perpendiculaire,

$$\pi = \frac{\alpha^2 ax + \beta^2 by + \alpha^2 \beta^2}{\sqrt{\alpha^4 a^2 + \beta^4 b^2}};$$

et l'expression de Q prendra la forme

$$Q = P \frac{\pi \sqrt{\alpha^4 a^2 + \beta^4 b^2}}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2};$$

mais, en vertu des expressions précédentes,

$$CG = H = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$OG = A = \frac{\alpha^2 \beta^2 H}{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2},$$

et de la relation

$$A . H = \delta^2,$$

on trouvera, pour le radical qui entre dans l'expression de Q,

$$\sqrt{\alpha^4 a^2 + \beta^4 b^2} = \frac{\alpha \beta \delta \delta'}{A},$$

où δ' est le diamètre parallèle à l'axe spontané OS, et δ le diamètre conjugué. On aura donc pour Q cette expression plus simple :

$$Q = \frac{P\pi}{A} \cdot \frac{\alpha\beta . \delta\delta'}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Or maintenant, soit désignée par θ la vitesse angulaire de la rotation du corps autour de l'axe spontané OS, et par φ l'inclinaison de OG sur OS, ou de δ sur δ', ce qui est la même chose; il est clair que $\theta . \overline{OG} . \sin \varphi = \theta . A \sin \varphi$ est la vitesse du centre de gravité O du corps, et que par conséquent on a, pour la valeur de l'impulsion P qui a mis le corps en mouvement,

$$P = m \theta . A \sin \varphi,$$

m étant la masse de ce corps.

Si donc, au lieu de P, on substitue cette valeur dans la formule précédente, on aura (en ayant égard à la relation $\delta\delta' \sin \varphi = \alpha\beta$),

$$Q = \theta\pi \frac{m \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2 \beta^2}.$$

Or, dans cette expression, le facteur $\theta\pi$ marque la vitesse de ce point D

dont les coordonnées sont x et y, et l'autre facteur est une partie de la masse entière m du corps, exprimée par la fraction

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\alpha^2\beta^2};$$

on peut donc dire que, dans le mouvement du corps, le point dont il s'agit frappe avec la même force que si cette fraction de la masse s'y trouvait concentrée.

Si l'on considérait un autre point D′, on aurait de même, en nommant x' et y' ses coordonnées, π' sa plus courte distance à l'axe spontané, et Q′ la percussion dont ce point est capable,

$$Q' = \theta\pi' . \frac{m\alpha^2\beta^2}{\alpha^2x'^2+\beta^2y'^2+\alpha^2\beta^2}.$$

Mais si le point D′ est réciproque au point D, on aura, entre les coordonnées de ces deux points, les relations

$$x' = \frac{-\alpha^2\beta^2x}{\alpha^2x^2+\beta^2y^2}, \qquad y' = \frac{-\alpha^2\beta^2y}{\alpha^2x^2+\beta^2y^2};$$

et en mettant au lieu de x' et y' ces valeurs en x et y, on trouvera

$$Q' = \theta\pi' \frac{m(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)}{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\alpha^2\beta^2}.$$

Or le premier facteur $\theta\pi'$ est la vitesse du point D′, et l'autre facteur est la fraction

$$\frac{\alpha^2x^2+\beta^2y^2}{\alpha^2x^2+\beta^2x^2+\alpha^2\beta^2}$$

de la masse entière du corps; mais cette fraction et la précédente font ensemble l'unité : et leur rapport $\alpha^2\beta^2 : (\alpha^2x^2+\beta^2y^2)$ est, par les relations ci-dessus, le même que celui de x' à x, de y' à y, et par conséquent de $\sqrt{x'^2+y'^2}$ à $\sqrt{x^2+y^2}$; c'est donc le rapport inverse des distances u et u' des deux points D et D′ au centre de gravité G du corps.

On peut donc dire que, dans le mouvement du corps, les deux points réciproques D et D′ se partagent en quelque sorte la masse entière m

en deux parties μ et μ' réciproques à leurs distances au centre de gravité G, et que ces deux points sont capables des mêmes percussions respectives Q et Q′ que si ces parties de la masse s'y trouvaient respectivement concentrées.

Si l'on nomme Δ le demi-diamètre de l'ellipse centrale, sur la direction duquel tombent les deux points D et D′, on aura

$$uu' = \Delta^2 ;$$

et les deux fractions μ et μ' de la masse m, qui sont

$$\mu = m\frac{u'}{u+u'}, \quad \mu' = m\frac{u}{u+u'},$$

pourront s'exprimer par

$$m\frac{\Delta^2}{u^2+\Delta^2} \quad \text{et} \quad m\frac{u^2}{u^2+\Delta^2};$$

de sorte qu'on aura, pour les percussions Q et Q′, ces expressions plus simples :

$$Q = \theta\pi \,.\, m\frac{\Delta^2}{u^2+\Delta^2},$$

$$Q' = \theta\pi' \,.\, m\frac{u^2}{u^2+\Delta^2},$$

expressions toutes semblables à celles qu'on aurait dans le simple cas d'une verge raide immatérielle DD′ qui serait chargée à ses deux bouts des deux points massifs μ et μ', et serait animée de la même rotation θ que le corps lui-même autour du même axe spontané OS.

On pourrait donc imaginer qu'au moment du choc, on remplace le corps par cette verge raide DD′ (ou même par toute autre de même centre G, de même masse m et de même bras d'inertie Δ); et une telle verge serait capable, non-seulement par ses deux bouts, mais encore par un point quelconque de sa direction (regardée comme une ligne inflexible), de frapper un obstacle avec la même force Q que le point correspondant du corps lui-même.

Ce n'est pas que cette verge, si elle venait avec la même vitesse angulaire, mais en sens opposé à celle du corps, fût capable de lui faire

équilibre ou d'éteindre tout son mouvement : mais elle y réduirait au repos tous les points qui tombent sous sa direction; de manière que le corps ne pourrait plus garder qu'un mouvement de rotation sur cette droite; or un corps qui tourne autour d'une droite est incapable d'aucune percussion sur aucun point de cette droite; donc si l'on ne s'occupe que de la percussion dont le corps est capable par un quelconque des points de la droite DD', cette percussion est exactement la même que celle de la verge, et c'est dans ce sens précis qu'à l'instant du choc, la verge peut être substituée au corps.

(La suite prochainement.)

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN UN PRODUIT DE DEUX SOMMES DE CARRÉS;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Désignons par m un nombre impair donné dont tous les facteurs premiers soient de la forme $4\mu + 1$. Décomposons $16m$ de toutes les manières possibles en un produit de deux sommes de quatre carrés impairs, de manière à avoir

$$16m = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2),$$

x, y, z, t, x', y', z', t' étant impairs et positifs, et deux décompositions étant regardées comme différentes quand les nombres x, y, etc., ne sont pas tous identiques de part et d'autre. Soit A le nombre des décompositions ainsi obtenues.

D'un autre côté, décomposons $4m$ de toutes les manières possibles en un produit de deux sommes de deux carrés impairs, de manière à avoir

$$4m = (u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2),$$

u, v, u', v' étant impairs et positifs, et deux décompositions étant regardées comme différentes quand les nombres u, v, etc., n'y sont pas tous identiquement les mêmes. Prenons partout le premier facteur $u^2 + v^2$, que nous désignerons par $2a$, et formons la somme $\sum a$ pour toutes les décompositions indiquées.

On aura entre A et $\sum a$ une relation bien simple. Car

$$A = \sum a.$$

Soit, comme exemple, $m = 5$. Les décompositions de 16.5 sont au nombre de douze : elles résultent du produit de la quantité

$$1 + 1 + 1 + 1,$$

prise successivement pour premier et pour second facteur, par chacune des six quantités suivantes :

$$\begin{aligned} &9+9+1+1,\\ &9+1+9+1,\\ &9+1+1+9,\\ &1+9+1+9,\\ &1+1+9+9,\\ &1+9+9+1. \end{aligned}$$

Quant aux décompositions de $4m$, les voici :

$$\begin{aligned} &(1+1)(1+9), \quad (1+1)(9+1),\\ &(1+9)(1+1), \quad (9+1)(1+1). \end{aligned}$$

Les premiers facteurs $2a$ étant successivement

$$2,\ 2,\ 10,\ 10,$$

on en conclut, conformément à notre théorème,

$$\sum a = 12 = \mathrm{A}.$$

Si le nombre m avait un ou plusieurs facteurs premiers de la forme $4\mu + 3$, l'égalité

$$\mathrm{A} = \sum a$$

n'aurait plus lieu : elle serait remplacée par l'inégalité

$$\mathrm{A} > \sum a.$$

Le théorème que nous venons de donner n'est qu'un exemple pris entre plusieurs autres d'un genre semblable. Mais l'espace dont nous pouvions disposer étant rempli, nous nous arrêtons et nous supprimons même la démonstration.

SIMPLIFICATION

DE

LA THÉORIE DES FORMES BINAIRES DU SECOND DEGRÉ

A DÉTERMINANT POSITIF;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET [*].

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR M. JULES HOËL.

Plus le domaine de l'arithmétique transcendante s'est agrandi, depuis l'époque mémorable de la publication de l'ouvrage de Gauss et par les travaux qui l'ont suivie, plus il est à désirer que l'accès de cette belle branche de l'analyse soit rendu plus facile par des simplifications apportées à ses éléments. C'est pour arriver à ce but que déjà, dans plusieurs de mes Mémoires, j'ai fait précéder mes propres recherches de nouvelles démonstrations des propositions connues sur lesquelles je m'appuyais. Le présent travail, consacré à la théorie des formes quadratiques à déterminants positifs, a aussi pour but une simplification analogue. On sait que cette théorie, sous sa forme actuelle, exige des considérations très-détaillées, et que l'on peut écarter, comme on le verra par l'exposition suivante. Je vais commencer par quelques remarques sur les fractions continues; bien que ces remarques ne contiennent aucun fait nouveau, il n'en est pas moins utile de les placer ici sous la forme qui convient à l'application que nous devons en faire.

[*] Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 13 juillet 1854. — Nous sommes heureux de pouvoir joindre à la traduction de M. Hoël une *addition* (relative au § VII) que l'auteur même du Mémoire, M. Dirichlet, a bien voulu nous remettre au mois d'août dernier, et l'extrait d'une Lettre qu'il nous a adressée plus tard au sujet du § IV.

(J. LIOUVILLE.)

§ I.

Nous désignerons, dans ce qui va suivre, une fraction continue

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \ldots}}$$

d'un nombre de termes fini ou infini, par la notation

$$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots);$$

et d'abord observons que nous n'aurons à considérer que des fractions continues dont tous les termes seront des nombres entiers, à l'exception, bien entendu, du dernier, dans le cas où, le développement n'étant pas poussé jusqu'au bout, ce dernier terme, considéré comme un quotient complet, peut avoir une valeur quelconque. Les fractions continues dont la considération est la plus importante dans les recherches sur les nombres, sont celles dont tous les termes, excepté le premier (qui peut aussi être nul), ont des valeurs positives. Une quantité irrationnelle positive ω peut s'exprimer d'une seule manière par une fraction continue de cette espèce; et l'expression de ω sous cette forme, ou, si ω est négatif, l'expression de sa valeur absolue précédée du signe $-$, est ce que nous appellerons le développement *normal* de ω en fraction continue.

Le problème que nous devons traiter d'abord est celui-ci : D'une fraction continue de la forme

$$\omega = (\alpha, \beta, \ldots, \mu, \nu, p, q, r, \ldots, u, v, \ldots),$$

où les termes ne commencent à être tous positifs qu'à partir de p inclusivement, déduire le développement normal de la quantité irrationnelle ω. Il est aisé de montrer que l'on peut atteindre ce but par une série de transformations n'affectant en rien les termes qui suivent un terme suffisamment éloigné u, et que la différence entre le nombre des nouveaux termes qui se trouvent finalement introduits à la place de $\alpha, \beta, \ldots, u$, et le nombre des termes primitifs sera paire ou impaire, suivant que ω est positif ou négatif.

Pour nous en convaincre, considérons d'abord le cas où ν n'est pas le premier terme. Dans cette hypothèse, on peut remplacer μ, ν et quelques-uns des termes qui les suivent immédiatement, tous les autres restant sans altération, par de nouveaux termes dont le nombre a une différence paire avec le nombre des anciens termes, et qui, à l'exception du premier (lequel peut être nul ou négatif), sont tous positifs, de sorte que l'irrégularité du développement donné recule au moins d'un rang. Dans cette transformation partielle, il faut distinguer divers cas, selon que ν a une valeur nulle ou une valeur négative $-n$. Dans le premier cas, les trois termes μ, 0, p doivent être remplacés par le terme unique $\mu + p$. Le second cas se subdivise en trois autres, suivant que l'on a

$$n > 1; \quad n = 1, \quad p > 1; \quad n = 1, \quad p = 1.$$

Dans ces trois cas, on se servira respectivement des trois équations suivantes, qu'il est facile de vérifier,

$$(\mu, -n, p, q, \ldots) = (\mu - 1, 1, n - 2, 1, p - 1, q, \ldots) \text{ [*]},$$
$$(\mu, -1, p, q, \ldots) = (\mu - 2, 1, p - 2, q, \ldots),$$
$$(\mu, -1, 1, q, r, s, \ldots) = (\mu - q - 2, 1, r - 1, s, \ldots).$$

On voit qu'une telle transformation partielle fait varier, suivant le cas, le nombre des termes de 2, 0, -2 unités; et il est à peine besoin d'avertir que lorsqu'une des différences $n - 2$, $p - 1$, $p - 2$, $r - 1$, qui, d'après nos suppositions, ne sauraient être négatives, se réduit à zéro, il faut remplacer le terme nul et les deux termes positifs qui le précèdent et le suivent immédiatement, par un seul terme égal à la somme de ces deux termes.

Par un emploi répété de ce procédé, on parvient à rendre positifs

[*] Lagrange avait déjà remarqué (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1768, page 152) que l'on peut débarrasser une fraction continue de ses termes négatifs; mais l'équation qu'il donne pour remplir cet objet, laquelle n'est autre chose que la première de nos trois équations, n'est pas suffisante, parce que, dans le cas de $n = 1$, elle introduit un nouveau terme négatif, et si l'on veut le faire disparaître en appliquant de nouveau la même opération, on retombe sur la fraction continue proposée.

tous les termes, à partir du second inclusivement. Si alors le premier terme n'est pas négatif, l'opération est terminée, et le résultat est conforme à ce qui a été dit plus haut, puisque tous les changements introduits successivement dans le nombre des termes sont exprimés par des nombres pairs. Si au contraire le premier terme a une valeur négative $-a$, la fraction continue étant de la forme

$$\omega = (-a, b, c, d, \ldots),$$

on remplacera celle-ci, suivant qu'on aura

$$b > 1 \quad \text{ou} \quad b = 1,$$

par la première ou la seconde des deux expressions

$$\omega = -(a-1, 1, b-1, c, \ldots),$$
$$\omega = -(a-1, c+1, d, \ldots),$$

de sorte que le résultat sera encore ramené à l'énoncé donné ci-dessus.

§ II.

1°. Si, entre deux quantités ω, Ω et les nombres entiers α, β, γ, δ, dont le premier n'est pas nul, on a les relations

$$\omega = \frac{\gamma + \delta\Omega}{\alpha + \beta\Omega}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

on peut toujours former une équation telle que

$$\omega = (\lambda, m, \ldots, r, \sigma, \Omega),$$

le premier et le dernier des nombres entiers λ, $m, \ldots, r$, σ pouvant seuls être nuls ou négatifs, tandis que les intermédiaires, quand ils ne manquent pas tout à fait, sont positifs et en nombre pair.

Comme on peut, d'après la forme que nous avons supposée aux deux équations, changer simultanément tous les signes de α, β, γ, δ, il est permis de supposer α positif. Si l'on a maintenant $\alpha = 1$, il en résulte immédiatement

$$\omega = \frac{\gamma + (\beta\gamma + 1)\Omega}{1 + \beta\Omega} = (\gamma, \beta, \Omega).$$

Si $\alpha > 1$, changeons, par la méthode ordinaire, $\frac{\gamma}{\alpha}$ en fraction continue, en faisant les divisions de manière à avoir toujours des restes positifs. On obtiendra ainsi la fraction continue

$$\frac{\gamma}{\alpha} = (\lambda, m, \ldots, r),$$

où le terme λ est le seul qui puisse être nul ou négatif, et où le nombre des termes $m, \ldots, r$ peut être supposé pair; car le terme r, pour lequel on a d'abord obtenu une valeur > 1, peut, s'il est nécessaire, se décomposer en $(r-1, 1)$. Les réduites successives de cette fraction continue,

$$\frac{\lambda}{1}, \quad \frac{\lambda m + 1}{m}, \ldots, \quad \frac{\varphi}{f}, \quad \frac{\gamma}{\alpha},$$

étant irréductibles et ayant des dénominateurs positifs, la dernière de ces réduites aura non-seulement la même valeur, mais aussi les mêmes termes que $\frac{\gamma}{\alpha}$. Comme on a de plus, par une propriété connue,

$$\alpha\varphi - \gamma f = 1,$$

il vient, en comparant cette relation avec celle qui a lieu entre α, β, γ, δ,

$$\beta = \alpha\sigma + f, \quad \delta = \gamma\sigma + \varphi,$$

σ étant un nombre entier. La fraction $\frac{\delta}{\beta}$ peut donc, au moyen du nouveau terme σ, être introduite dans la série des réduites, et l'on a

$$\omega = (\lambda, m, \ldots, r, \sigma, \Omega).$$

2°. Il faut encore, pour ce qui va suivre, examiner de plus près le cas particulier où α, β, γ, δ sont tous positifs, et satisfont en même temps aux conditions

$$\gamma \geqq \alpha, \quad \delta > \gamma.$$

Il est facile de voir que λ et σ sont alors positifs. Si $\alpha = 1$, cela résulte immédiatement de notre hypothèse, puisque, dans ce cas, $\lambda = \gamma$, $\sigma = \beta$. Si, au contraire, $\alpha > 1$, il est au moins tout d'abord évident que λ,

qui est égal, d'après ce qui précède, au nombre entier immédiatement inférieur à $\frac{\gamma}{\alpha}$, doit être positif. On peut s'assurer comme il suit qu'il en est de même pour σ. Puisque λ est positif, les numérateurs des réduites que nous avons formées plus haut seront aussi positifs, et iront en croissant à partir du premier inclusivement, de sorte que l'on a aussi $\gamma > \varphi$. Or, de ce que $\delta = \gamma\sigma + \varphi$, il en résulterait, si l'on supposait $\sigma = 0$,

$$\delta = \varphi < \gamma,$$

et si l'on supposait σ négatif, δ serait aussi négatif, contrairement à notre hypothèse.

Désignons, pour plus d'uniformité, par l, s les nombres positifs λ, σ; on aura, dans le cas particulier que nous considérons,

$$\frac{\gamma}{\alpha} = (l, m, \ldots, r), \quad \frac{\delta}{\beta} = (l, m, \ldots, r, s), \quad \omega = (l, m, \ldots, r, s, \Omega),$$

les termes l, $m, \ldots, r$, s étant tous positifs et en nombre pair.

§ III.

Passons maintenant à l'objet principal de ce Mémoire, et remarquons d'abord que toutes les formes quadratiques

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c),$$

dont nous nous occuperons, auront le même déterminant positif

$$D = b^2 - ac;$$

nous en avertissons ici une fois pour toutes. Le nombre entier et positif D est arbitraire, avec cette seule restriction qu'il ne peut être égal à un carré. Les coefficients extrêmes a, c, étant, en vertu de notre hypothèse, différents de zéro, il est évident que, dès qu'on connaît, outre D, le coefficient moyen et l'un des deux extrêmes, l'autre extrême sera complétement déterminé, et partant la forme elle-même le sera aussi.

A chaque forme (a, b, c), nous ferons correspondre une équation

$$a + 2b\omega + c\omega^2 = 0,$$

formée avec les mêmes coefficients, et dont nous représenterons toujours les racines sous la forme

$$\omega = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{c},$$

de telle sorte que le troisième coefficient c non altéré forme le dénominateur. Cela posé, les deux valeurs de ω, qui correspondent au signe supérieur et au signe inférieur, seront désignées, pour les distinguer, par les noms respectifs de *première* et de *seconde* racine appartenant à la forme (a, b, c). On voit aisément qu'une forme est complétement déterminée lorsqu'on connaît son déterminant et l'une des racines qui lui appartiennent. Car si une même quantité appartient à la fois, soit comme première racine, soit comme seconde racine, à deux formes (a, b, c), (A, B, C), on aura l'égalité

$$\frac{-b \mp \sqrt{D}}{c} = \frac{-B \mp \sqrt{D}}{C},$$

dans laquelle il faut prendre ensemble, soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs. Il en résultera immédiatement, à cause de l'irrationnalité de $\sqrt{D}$, $B = b$, $C = c$; donc les deux formes sont identiques.

Lorsque nous dirons que deux formes

$$(1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

sont équivalentes, nous entendrons toujours qu'il s'agit de l'équivalence propre, de sorte que cette supposition implique l'existence d'une substitution

$$(2) \qquad x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \gamma X + \delta Y, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix},$$

dont les coefficients satisfont à la condition

$$(3) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

et par laquelle la première forme se change en la seconde. Au moyen d'une telle substitution, en résolvant les équations (2) par rapport à X et à Y, on en déduit une autre substitution semblable par laquelle la seconde forme se change en la première.

On sait que, dans certains cas particuliers, outre les substitutions dont nous venons de parler, il y en a d'autres qui servent aussi à passer d'une forme à une autre forme équivalente, et qui, au lieu de satisfaire à l'équation (3), satisfont à celle-ci

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1.$$

Nous avertissons ici expressément que nous excluons tout à fait cette dernière espèce de substitutions.

Après les préliminaires que nous avons posés, il est facile de démontrer les propositions suivantes :

1°. *Entre les racines* correspondantes, *ou de même nom*, ω, Ω, *appartenant aux formes équivalentes* (1), *et les coefficients de la substitution* (2), *on a toujours la relation*

$$\omega = \frac{\gamma + \delta\Omega}{\alpha + \beta\Omega}. \tag{4}$$

Mettons l'équation que nous voulons démontrer sous la forme

$$\Omega = \frac{\gamma - \alpha\omega}{\beta\omega - \delta}:$$

remplaçons ω par sa valeur, et faisons disparaître l'irrationnalité du dénominateur ; le second membre, en vertu des équations

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad D = b^2 - ac,$$

deviendra

$$\frac{-M \mp \sqrt{D}}{N},$$

en posant

$$M = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, \quad N = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2.$$

Or les expressions de M et de N coïncidant avec celles que l'on obtient pour B et C lorsqu'on applique la substitution (2) à la première des formes (1), notre assertion est démontrée.

2°. *Si l'équation* (4) *a lieu pour un couple de racines correspondantes* ω, Ω *appartenant aux formes* (1), *et que les nombres entiers* α, β, γ, δ *satisfassent en même temps à la condition* (3), *les deux formes*

sont équivalentes, et la première se change dans la seconde par la substitution (2).

D'après l'hypothèse, on trouve sans nouveau calcul

$$\frac{-B \mp \sqrt{D}}{C} = \frac{-M \mp \sqrt{D}}{N},$$

où l'on doit prendre ensemble, soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs. On a par conséquent

$$B = M, \quad C = N,$$

c'est-à-dire que la forme dans laquelle (a, b, c) se change par la substitution (2), coïncide avec la forme (A, B, C).

Il va sans dire d'ailleurs que si l'équation (4) a lieu pour un des couples de racines, elle a aussi lieu pour l'autre.

3°. Nous aurons souvent à considérer, dans ce qui suit, des formes contiguës, c'est-à-dire des formes liées entre elles comme les formes

$$(a, b, a'), \quad (a', b', a''),$$

de telle sorte que le dernier coefficient de l'une soit égal au premier coefficient de l'autre, tandis que leurs coefficients moyens b, b' satisfont à la condition

$$b + b' \equiv 0 \quad (\text{mod. } a').$$

De pareilles formes sont toujours équivalentes. Car si l'on applique à la première la substitution $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & \delta \end{pmatrix}$, qui remplit la condition (3), δ restant indéterminé, on obtient une nouvelle forme dont le premier coefficient est $= a'$, tandis que le second, $= -b' - a'\delta$, devient égal au coefficient donné b', si l'on pose

$$\delta = -\frac{b + b'}{a'}.$$

Pour ces deux formes, l'équation (4), entre les deux racines correspondantes ω, ω' qui leur appartiennent respectivement, devient

$$\omega = \delta - \frac{1}{\omega'}, \quad \text{ou} \quad \omega' = -\frac{1}{\omega - \delta}.$$

§ IV.

Si les deux racines

$$\frac{-b-\sqrt{D}}{c}, \quad \frac{-b+\sqrt{D}}{c},$$

qui appartiennent à la forme (a, b, c) ont leurs valeurs absolues, la première supérieure, la seconde inférieure à l'unité, et que de plus ces racines soient de signe contraire, la forme est dite alors une forme *réduite*. En vertu de la première condition, on a $b > 0$, et en vertu de la seconde, $b < \sqrt{D}$. Le produit $-ac = D - b^2$ est donc positif, et les coefficients extrêmes a, c sont de signe contraire. Il est évident en même temps que la première racine est de même signe que a et de signe contraire à c.

Si la forme (a, b, c) est une forme réduite, il en est de même aussi de la forme (c, b, a); cela résulte de ce que chaque racine de l'une des formes a pour valeur l'inverse de la valeur de la racine *non correspondante* appartenant à l'autre forme.

Pour un déterminant donné D, il n'existe qu'un nombre fini de formes réduites, qui s'obtiennent toutes en cherchant pour chaque valeur de $b < \sqrt{D}$ tous les diviseurs c, positifs ou négatifs, de $D - b^2$, dont les valeurs absolues soient comprises entre $\sqrt{D} + b$ et $\sqrt{D} - b$; puis en déterminant, pour chaque combinaison b, c ainsi obtenue, le premier coefficient a par la formule

$$a = -\frac{D - b^2}{c}.$$

En conservant la notation du § III, 3°, supposons que (a, b, a') soit une forme réduite donnée, et cherchons si, parmi les formes (a', b', a'') contiguës à celle-là par la dernière partie, et dont les coefficients moyens sont déterminés par l'équation

$$b' = -b - a'\delta,$$

il se trouve une ou plusieurs formes réduites. Pour cela, remarquons d'abord que, si (a', b', a'') est une forme réduite, la première racine ω' appartenant à cette forme, devra être de signe contraire à la première racine ω appartenant à (a, b, a'), puisque le même nombre a' entre

dans l'une de ces formes comme premier coefficient, et dans l'autre comme troisième coefficient. Par conséquent, dans l'équation

$$\omega' = -\frac{1}{\omega - \delta},$$

où ω est pris avec sa première valeur, il faut choisir le nombre entier arbitraire δ de telle sorte que ω' soit numériquement > 1 et de signe contraire à ω. Cette condition, qui revient simplement à exiger que $\omega - \delta$ soit numériquement < 1 et de même signe que ω, peut évidemment être satisfaite dans tous les cas, et ne peut l'être que d'une seule manière, en prenant δ égal au plus grand nombre entier contenu dans la valeur numérique de ω, et lui donnant le signe de ω. ω étant numériquement > 1, ce nombre entier δ, qui est maintenant complétement déterminé, ne pourra jamais être nul. Il est donc ainsi démontré que, parmi les formes (a', b', a''), il n'y a pas plus d'une forme réduite. Nous allons maintenant faire voir que la forme correspondante à la valeur de δ que nous venons de déterminer est réellement une forme réduite. Supposons que, dans notre équation

$$\omega' = -\frac{1}{\omega - \delta},$$

ω désigne la seconde racine; ω sera de même signe que $-\delta$, puisque δ est de même signe que la première valeur de ω. Le dénominateur $\omega - \delta$, dont le second terme est au moins égal à l'unité, est donc numériquement > 1, et par conséquent ω' est numériquement < 1, et son signe est le même que celui de δ, et par suite aussi que celui de la première racine ω; il est donc contraire à celui de la première racine ω', comme cela devait être.

Pour obtenir commodément le coefficient moyen b' de la forme réduite (a', b', a''), laquelle est maintenant complétement déterminée [*], remarquons que, d'après ce qui précède, si l'on pose

$$\omega - \delta = \sigma$$

(ω désignant la première racine), σ sera numériquement < 1 et de même signe que ω. Remplaçons δ par $\omega - \sigma$ dans l'équation

$$b' = -b - a'\delta,$$

[*] *Voir* plus bas (page 375) l'extrait d'une Lettre de M. Dirichlet. (J. Liouville.)

et substituons en même temps à ω sa valeur; on a ainsi

$$b' = \sqrt{D} + a'\sigma.$$

De cette équation et de ce que la fraction σ est de même signe que ω, et par suite de signe contraire à a', il résulte que b' est compris entre $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp a'$, en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que a' est positif ou négatif. Au moyen de cette condition, jointe à la congruence

$$b' \equiv -b \pmod{a'},$$

on déterminera facilement et sans ambiguïté la valeur de b'.

Par un raisonnement semblable, et que l'on peut encore simplifier en ramenant, d'après une remarque faite plus haut, la question à celle que l'on vient de traiter, on démontre qu'il existe une forme réduite, et une seule $('a, 'b, a)$, contiguë par la première partie à la forme donnée.

§ V.

Étant donnée une forme réduite φ_0, calculons la forme φ_1 contiguë à φ_0 par la dernière partie; calculons de même la forme φ_2 contiguë à φ_1, et ainsi de suite. Effectuons un calcul semblable de l'autre côté, et désignons par φ_{-1} la forme contiguë à la proposée par la première partie, et ainsi de suite. On obtient ainsi la série suivante de formes équivalentes,

$$\ldots, \quad \varphi_{-2}, \quad \varphi_{-1}, \quad \varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \ldots,$$

indéfinie dans les deux sens. Le nombre des formes réduites qui appartiennent à un déterminant donné étant fini, il en résulte évidemment que les formes contenues dans cette série ne sont pas toutes différentes entre elles; et en même temps que ces formes, ayant leurs premiers coefficients alternativement positifs et négatifs, deux d'entre elles ne peuvent être identiques que si la différence de leurs indices est paire. D'autre part, d'après la manière dont notre série a été formée, chaque terme détermine complétement le précédent et le suivant, d'où il s'ensuit que, si deux formes sont identiques, il en est de même de deux autres formes quelconques respectivement équidistantes des premières dans le même sens, c'est-à-dire telles, que la différence de leurs

indices soit la même que celle des indices des premières. Chaque forme se reproduisant donc des deux côtés, soit φ_{2n} la première des formes venant à la suite de φ_0 qui soit identique avec φ_0. Alors les formes

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots, \varphi_{2n-1}$$

seront toutes différentes entre elles. En effet, nous supposons déjà que la première n'est identique avec aucune des suivantes, et s'il s'en trouvait parmi celles-ci deux qui fussent identiques, et dont les indices différassent de $2h$, il faudrait, d'après la remarque que nous avons faite, que φ_0 fût aussi identique avec φ_{2h}, ce qui est évidemment contraire à notre supposition, puisque $2h < 2n$. Les $2n$ formes considérées composent ainsi une période qui se répète à l'infini dans les deux sens, de sorte que deux formes φ_μ, φ_ν sont ou ne sont pas identiques, selon que leurs indices satisfont ou ne satisfont pas à la congruence

$$\mu \equiv \nu \pmod{2n}.$$

Il est clair du reste qu'on peut faire commencer la période à l'un quelconque de ses termes, et que notre série peut aussi s'obtenir par la répétition de la période suivante, composée des mêmes formes,

$$\varphi_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{2n-1}, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}.$$

Puisque, d'après le § III, une forme φ_ν et les racines ω_ν appartenant à cette forme se déterminent réciproquement, la condition nécessaire et suffisante pour l'égalité de deux racines correspondantes ω_μ, ω_ν est donnée aussi par la congruence

$$\mu \equiv \nu \pmod{2n}.$$

Désignons de plus par δ_ν le plus grand nombre entier contenu dans la valeur absolue de la première racine ω_ν, et pris avec le signe de ω_ν, on aura (§ IV) entre les racines correspondantes ω_ν, $\omega_{\nu+1}$ l'équation

$$\omega_\nu = \delta_\nu - \frac{1}{\omega_{\nu+1}}.$$

Puisque δ_ν est complétement déterminé par la première racine ω_ν, la

congruence $\mu \equiv \nu$ (mod. $2n$) entraînera l'égalité $\delta_\mu = \delta_\nu$. Mais la réciproque ne s'ensuit pas.

Comme on peut attribuer indifféremment l'indice zéro à un terme quelconque de la série, nous conviendrons, pour éviter des distinctions inutiles, que les premiers coefficients des formes d'indices pairs seront positifs. D'après cette convention, le signe de chaque première racine ω_ν et celui de la valeur correspondante de δ_ν seront les mêmes que celui de $(-1)^\nu$, tandis que la seconde racine ω_ν aura le signe contraire.

Nous désignerons enfin par k_ν la valeur absolue de δ_ν, de sorte que

$$\delta_\nu = (-1)^\nu k_\nu,$$

et l'on aura encore

$$k_\mu = k_\nu,$$

lorsque μ et ν seront congrus suivant le module $2n$.

Multiplions l'équation précédente

$$\omega_\nu = \delta_\nu - \frac{1}{\omega_{\nu+1}} = (-1)^\nu k_\nu - \frac{1}{\omega_{\nu+1}},$$

et toutes les équations analogues qui viennent à la suite, par ± 1, ∓ 1 alternativement, suivant que ν sera pair ou impair; il viendra

$$\pm \omega_\nu = k_\nu + \frac{1}{\mp \omega_{\nu+1}}, \quad \mp \omega_{\nu+1} = k_{\nu+1} + \frac{1}{\pm \omega_{\nu+2}}, \ldots$$

Si l'on suppose que les racines correspondantes ω_ν, $\omega_{\nu+1}$, $\omega_{\nu+2}, \ldots$, soient les premières racines, alors $\pm \omega_\nu$, $\mp \omega_{\nu+1}$, $\pm \omega_{\nu+2}, \ldots$, seront des quantités positives > 1. On obtient ainsi le développement normal en fraction continue périodique pure

$$\pm \omega_\nu = (k_\nu, k_{\nu+1}, k_{\nu+2}, \ldots),$$

ou

$$\omega_\nu = (-1)^\nu (k_\nu, k_{\nu+1}, \ldots, k_{2n+\nu-1}; k_\nu, k_{\nu+1}, \ldots).$$

Pareillement, de l'équation

$$\omega_{\nu-1} = \delta_{\nu-1} - \frac{1}{\omega_\nu},$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{1}{\omega_\nu} = \delta_{\nu-1} - \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega_{\nu-1}}\right)},$$

et des équations analogues qui la précèdent, on peut tirer la valeur inverse de la seconde racine

$$\frac{1}{\omega_\nu} = (-1)^{\nu-1}(k_{\nu-1},\ k_{\nu-2}, \ldots,\ k_{\nu-2n};\ k_{\nu-1},\ k_{\nu-2}, \ldots),$$

et l'on voit que la période qui se présente ici, et dont les termes peuvent s'écrire ainsi :

$$k_{2n+\nu-1},\ k_{2n+\nu-2}, \ldots,\ k_{\nu+1},\ k_\nu,$$

s'obtient en renversant l'ordre des termes de la période qui correspond au développement de la première racine.

Il est encore à remarquer que, pour la série de nombres dont k_μ est le terme général, une période de $2n$ termes est la plus courte période d'un nombre pair de termes dont la répétition puisse produire cette série. Car, s'il en existait une plus courte de $2m$ termes, il résulterait alors du développement que nous avons trouvé pour la première racine ω_ν, que ω_0 coïnciderait avec ω_{2m}, et par suite aussi φ_0 avec φ_{2m}, tandis qu'au contraire nous avons supposé que $2n$ était le plus petit indice qui donnât φ_{2n} identique avec φ_0.

Observons enfin que la totalité des formes réduites appartenant à un déterminant donné peut toujours se partager en périodes comme celles que nous avons considérées dans ce paragraphe. Après avoir calculé, en partant d'une certaine forme réduite, la période dont cette forme fait partie, si cette période ne contient pas toutes les formes réduites, on procède de la même manière en partant d'une des formes restantes. La seconde période ainsi trouvée se compose de formes toutes différentes entre elles, et évidemment différentes aussi de celles de la première période. On continuera ainsi à calculer de nouvelles périodes, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les formes réduites.

§ VI.

Abordons maintenant le problème qui consiste à décider si deux formes données sont ou ne sont pas équivalentes. Comme on peut aisément, de chaque forme, déduire une forme réduite qui lui soit équivalente, et que d'ailleurs les formes qui appartiennent à la même période sont toujours équivalentes, il ne reste plus qu'à rechercher si des formes appartenant à des périodes différentes peuvent être équivalentes. Dans cette recherche, il est évident que les deux formes que l'on doit comparer peuvent être choisies arbitrairement parmi celles de leurs périodes respectives. Nous supposerons en conséquence que les premiers coefficients des deux formes

$$\varphi_0 = (a, b, c), \quad \Phi_0 = (A, B, C)$$

sont positifs; nous attribuerons à chacune d'elles, dans sa période, l'indice zéro; nous conserverons, pour la période de la première, toutes les notations du § V, et nous emploierons pour la période de la seconde les lettres capitales correspondantes; de sorte que les premières racines appartenant à nos deux formes seront représentées par les fractions continues normales

$$\omega_0 = (k_0, k_1, k_2, \ldots), \quad \Omega_0 = (K_0, K_1, K_2, \ldots).$$

Si l'on suppose maintenant que les deux formes soient équivalentes, et que la première se change en la seconde par la substitution $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$, on aura par le § III, 1°,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \omega_0 = \frac{\gamma + \delta\,\Omega_0}{\alpha + \beta\,\Omega_0}.$$

Il est aisé de voir que α ne peut pas être nul. Car on aurait alors

$$\gamma = \pm 1,$$

et par suite

$$A = c,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse que l'on a faite sur les signes des coefficients. Nous avons donc, d'après le § II, 1°, une équation de la

forme

$$\omega_0 = (\lambda, m, \ldots, r, \sigma, \Omega_0) = (\lambda, m, \ldots, r, \sigma, K_0, K_1, \ldots, K_\nu, \ldots),$$

les termes $\lambda, m, \ldots, r, \sigma$ étant en nombre pair $2g$. Si l'on ramène maintenant, d'après le § I, la fraction continue à la forme normale, alors, puisque ω_0 est positif, le nombre des termes qui précèdent un terme K_ν, à partir duquel la fraction ne subit plus aucun changement, variera d'un nombre pair $2h$, h étant positif ou négatif suivant que le nombre des termes croît ou décroît, et pouvant aussi être nul, comme il arrive, entre autres, si la fraction primitive a déjà la forme normale. Après la transformation, la fraction continue doit être identique avec celle qui représente ω_0. On a donc, pour toute valeur de l'indice ν supérieure à une certaine limite,

$$K_\nu = k_{2g+2h+\nu}.$$

Écrivons $2Ni + \nu$ au lieu de ν, $2Ni$ désignant un multiple suffisamment grand de $2N$. Le nouveau ν pourra recevoir une valeur positive quelconque, zéro compris, et l'on aura, en négligeant $2Ni$ dans l'indice de K, et réduisant, dans l'indice de k, $2g + 2h + 2Ni$ à son résidu *minimum* $2m$ suivant le module $2n$,

$$K_\nu = k_{2m+\nu}.$$

On a par conséquent

$$\Omega_0 = \omega_{2m},$$

et partant

$$\Phi_0 = \varphi_{2m},$$

c'est-à-dire que la seconde forme est contenue dans la période appartenant à la première, et répond, dans cette période, à l'indice $2m$. Donc des formes appartenant à des périodes différentes ne peuvent être équivalentes.

§ VII.

Après avoir donné une démonstration simple de la proposition la plus difficile de la théorie des formes du second degré de déterminant positif, il nous reste à indiquer en quelques mots les modifications que doit subir le reste de la théorie, conformément à notre mode de dé-

monstration, dans les points qui s'appuient, soit sur la proposition elle-même, soit sur les principes qui servent à l'établir.

Comme les opérations par lesquelles on reconnaît l'équivalence de deux formes, fournissent toujours une première substitution au moyen de laquelle l'une des formes se change en l'autre, il ne reste plus que ce problème à résoudre pour compléter ce qui concerne l'équivalence et la transformation des formes : Connaissant une transformation d'une forme en une autre, en déduire toutes les autres transformations qui remplissent le même objet. Ce problème se ramène facilement à cet autre plus simple : Trouver l'expression de toutes les transformations d'une forme en elle-même; et l'on peut supposer en outre que les coefficients de la forme n'ont pas de diviseur commun; car toute substitution par laquelle une forme se transforme en elle-même, opère de la même manière sur la forme que l'on obtient par la suppression du diviseur commun, et *vice versâ*. Soit maintenant (a, b, c) une forme dont les coefficients a, b, c n'ont pas de diviseur commun; le plus grand diviseur commun de a, $2b$, c aura une valeur numérique égale à 1 ou à 2, et que nous désignerons par σ, le cas de $\sigma = 2$ ne pouvant se présenter que lorsque le déterminant $D = b^2 - ac$ sera de la forme $4h + 1$. Cela posé, on démontre [*] que toutes les substitutions par lesquelles une forme se transforme en elle-même, s'obtiennent au moyen des équations

$$(1) \qquad \alpha = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{cu}{\sigma}, \quad \gamma = \frac{au}{\sigma}, \quad \delta = \frac{t + bu}{\sigma},$$

où l'on mettra pour t, u tous les nombres entiers qui satisfont simultanément à l'équation

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2;$$

et l'on fait voir en même temps que la solution complète de cette équation indéterminée peut se déduire facilement de la solution exprimée par les plus petits nombres entiers et positifs.

---

[*] *Disq. arith.*, page 181, ou *Journal de Crelle*, tome XXIV, page 328. La seconde de ces deux démonstrations est donnée pour des nombres complexes; mais elle s'applique, sans y changer un mot, à des nombres réels, en supposant que la lettre ω y représente ce que nous désignons ici par σ. — Voir au surplus l'*Addition*, page 373.

On peut maintenant profiter de la dépendance mutuelle des deux problèmes pour la résolution de l'équation indéterminée, le problème de la transformation pouvant être résolu directement dans le cas d'une forme réduite. Nous pourrons ici supposer a positif dans la forme réduite, et nous borner à considérer les substitutions dont tous les coefficients α, β, γ, δ sont positifs. Soit

$$\omega = (k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{2n-1}; k_0, k_1, \ldots)$$

le développement normal en fraction continue périodique de la première racine appartenant à la forme (a, b, c), et désignons par $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\beta}$ deux réduites consécutives, dont la seconde corresponde au dernier terme k_{2n-1} d'une période; on a alors

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \omega = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega},$$

et de ces équations il résulte, d'après le § III, 2°, en y supposant que les deux formes considérées soient identiques, que notre forme se transforme en elle-même par la substitution composée des quatre coefficients positifs α, β, γ, δ. Réciproquement, il est aisé de faire voir que toutes les substitutions de l'espèce dont nous parlons peuvent s'obtenir de cette manière. Soient, en effet, α, β, γ, δ les coefficients d'une telle substitution; on conclut du § III, 1°, que les deux équations précédentes ont lieu. Mettant maintenant la seconde de ces équations, qui est satisfaite par les deux racines, sous la forme

$$\beta\omega^2 + (\alpha - \delta)\omega - \gamma = 0,$$

et remarquant que la première de ces racines est comprise entre 1 et ∞, et la seconde entre -1 et 0, il s'ensuit que le premier membre doit être négatif pour $\omega = 1$, et positif pour $\omega = -1$. On obtient ainsi les deux inégalités

$$(2) \qquad \gamma - \alpha > \beta - \delta, \quad \delta - \gamma > \alpha - \beta,$$

et l'on en déduit aisément ces deux autres

$$\delta > \gamma, \quad \gamma \geqq \alpha,$$

dont la première se vérifie de la manière suivante : Si l'on partait de la supposition contraire $\delta \leqq \gamma$, puisque $\alpha\delta > \beta\gamma$, il en résulterait $\alpha > \beta$, ou $\alpha - \beta > 0$, et par suite, en vertu de la seconde des inégalités (2), $\delta > \gamma$. Si l'on supposait, en second lieu, $\alpha > \gamma$, on ne pourrait pas avoir en même temps $\delta > \beta$, parce qu'alors $\alpha\delta$ surpasserait $\beta\gamma$ au moins de trois unités Mais de $\beta - \delta \overset{=}{>} 0$, il s'ensuivrait, par la première des inégalités (2), $\gamma > \alpha$. Donc, puisque la supposition $\alpha > \gamma$ conduit à une contradiction, on a nécessairement $\gamma \geqq \alpha$.

Toutes les suppositions faites au § II, 2°, se trouvent donc ici réalisées, et l'on a

$$\frac{\gamma}{\alpha} = (l, m, \ldots, r), \quad \frac{\delta}{\beta} = (l, m, \ldots, r, s), \quad \omega = (l, m, \ldots, r, s, \omega).$$

Si l'on substitue à ω le développement normal supposé ci-dessus pour la première racine, on obtient deux développements normaux en fraction continue, égaux entre eux et par suite identiques. Donc la suite l, $m, \ldots, r, s$ se compose nécessairement d'une ou de plusieurs périodes telles que $k_0, k_1, \ldots, k_{2n-1}$, et $\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\beta}$ sont, comme nous l'avons annoncé, deux réduites consécutives correspondantes à la fin d'une période. Or, comme $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ croissent évidemment, si l'on passe d'une période à la suivante, il en résulte que les plus petites valeurs positives que l'on puisse donner aux coefficients d'une substitution sont celles qui correspondent à la fin de la première période, et il est facile de s'assurer que ces valeurs s'obtiennent en donnant à t et à u, dans les équations (1), les valeurs positives *minima*. En effet, la première et la quatrième de ces équations donnent

$$\alpha\delta = \frac{t^2 - b^2u^2}{\sigma^2} = \frac{t^2 - Du^2}{\sigma^2} - \frac{acu^2}{\sigma^2} = 1 - \frac{acu^2}{\sigma^2}.$$

Or $-ac$ étant positif, α et δ ont toujours le même signe, lequel, à cause de

$$\alpha + \delta = \frac{2t}{\sigma},$$

est aussi le signe de t. On voit de la même manière, d'après les expressions de β et de γ, que ces dernières quantités, lorsqu'elles ne sont pas

nulles toutes les deux (ce qui supposerait $u = 0$), sont aussi de même signe que u. Les substitutions positives cherchées α, β, γ, δ s'obtiennent donc au moyen de valeurs positives de t et de u, et puisque β et γ croissent avec u, la substitution exprimée par les moindres nombres possibles correspond aux valeurs positives *minima* de t et de u. Celles-ci, par conséquent, une fois que les autres auront été déterminées à l'aide de la fraction continue, seront données par les équations

$$t = \frac{\sigma}{2}(\delta + \alpha), \quad u = \frac{\sigma}{2b}(\delta - \alpha).$$

ADDITION A CE MÉMOIRE; PAR L'AUTEUR.

Pour que le lecteur soit dispensé de recourir aux écrits cités dans la Note relative au § VII, nous allons démontrer en peu de mots les formules rappelées à l'endroit auquel se rapporte cette Note.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

change la forme (a, b, c) en elle-même, sont évidemment exprimées par ces équations

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad a(\alpha^2 - 1) + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 = 0, \quad a\alpha\beta + 2b\beta\gamma + c\gamma\delta = 0.$$

dont la dernière a été simplifiée en ce qu'on y a remplacé $\alpha\delta$ par $\beta\gamma + 1$. En ajoutant les deux dernières après les avoir multipliées par δ et $-\gamma$, et ensuite après les avoir multipliées par $-\beta$ et α et ayant égard à la première, on obtient ce nouveau système d'équations

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad a(\alpha - \delta) + 2b\gamma = 0, \quad a\beta + c\gamma = 0,$$

système tout à fait équivalent au système primitif qui s'en déduit en faisant la somme des deux dernières équations du nouveau système après les avoir multipliées d'abord par α, γ, et ensuite par β, δ. Comme a n'est pas nul, si nous posons $\gamma = a\psi$, la quantité rationnelle ψ sera

complétement déterminée par γ, et nos deux dernières équations pourront être remplacées par celles-ci :

$$(1) \qquad \delta - \alpha = 2b\psi, \quad \beta = -c\psi, \quad \gamma = a\psi.$$

Or $\delta - \alpha$, β, γ étant des entiers, et le plus grand diviseur commun de a, $2b$, c ayant été désigné par σ, ψ sera nécessairement de la forme $\frac{u}{\sigma}$, où u est un entier, et nous aurons

$$\delta - \alpha = \frac{2b}{\sigma}u, \quad \beta = -\frac{c}{\sigma}u, \quad \gamma = \frac{a}{\sigma}u.$$

Si maintenant, dans l'équation

$$(\delta + \alpha)^2 = (\delta - \alpha)^2 + 4\alpha\delta = (\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma + 4,$$

nous substituons les expressions précédentes et si nous multiplions ensuite par σ^2, il viendra

$$[\sigma(\delta + \alpha)]^2 = 4[(b^2 - ac)u^2 + \sigma^2] = 4(\mathrm{D}u^2 + \sigma^2),$$

et nous en concluons que $\sigma(\delta + \alpha)$ est pair. En posant donc

$$\sigma(\delta + \alpha) = 2t,$$

t étant un entier, la dernière équation prendra la forme

$$(2) \qquad t^2 - \mathrm{D}u^2 = \sigma^2,$$

et nos entiers α, β, γ, δ se trouveront exprimés par les formules suivantes :

$$\alpha = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{c}{\sigma}u, \quad \gamma = \frac{a}{\sigma}u, \quad \delta = \frac{t + bu}{\sigma}.$$

Après avoir prouvé que les coefficients de toute substitution qui change la forme (a, b, c) en elle-même, sont exprimables au moyen des formules précédentes par deux entiers t et u liés entre eux par l'équation (2), il nous reste à faire voir que, réciproquement, toute solution entière (t, u) de cette dernière donne des valeurs entières pour α, β, γ, δ, et que ces valeurs satisfont aux équations (1) qui expriment

les conditions suffisantes pour que la substitution formée des coefficients α, β, γ, δ change la forme (a, b, c) en elle-même. Le premier point, qui est évident lorsque $\sigma = 1$, se prouve pour $\sigma = 2$ en observant que D et b étant impairs dans ce cas, t et u seront évidemment tous deux pairs ou tous deux impairs, et il n'est pas moins facile de vérifier la seconde assertion : il suffit de faire la substitution de α, β, γ, δ dans les équations (1), et d'avoir égard à l'équation (2).

(Toul, 14 août 1857).

Extrait d'une Lettre de M. Dirichlet à M. Liouville.

« ... En jetant les yeux sur le Mémoire que M. Hoüel a traduit récemment (j'ai vu la traduction entre vos mains à Toul), je me suis aperçu qu'on pourrait rendre ce Mémoire plus complet, sans l'allonger, en profitant d'une remarque que j'ai eu occasion de faire dans mon Cours. Si donc ce Mémoire n'est pas encore imprimé, veuillez y faire le changement indiqué ci-après [*].

» Les deux derniers alinéas du § IV sont à remplacer par ce qui suit :

» Pour déterminer le coefficient b', on remarquera que la valeur réciproque de la première des racines appartenant à la forme (a', b', a'') devant être une quantité σ numériquement inférieure à l'unité et de même signe que a', on aura

$$\sigma = \frac{-b' + \sqrt{D}}{a'}, \quad b' = \sqrt{D} - a'\sigma,$$

c'est-à-dire que b' se trouve compris entre $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} - (a')$, (a') désignant la valeur absolue de a'. Cette condition jointe à la congruence $b' \equiv b \pmod{a'}$ sert à déterminer b' sans ambiguïté et d'une manière facile.

» On prouve d'une manière toute semblable qu'il existe toujours une réduite unique contiguë à la proposée vers la gauche, et cela ré-

[*] Cette Lettre ne m'est parvenue qu'au moment où j'allais donner le bon à tirer. Pour éviter un remaniement difficile, je laisse subsister la rédaction ancienne, qui, d'ailleurs, était déjà très-satisfaisante ; mais j'ajoute la rédaction nouvelle dont nos lecteurs feront leur profit suivant le vœu de l'illustre auteur. (J. Liouville.)

sulte aussi du cas précédent au moyen de la remarque faite plus haut.

» Nous terminerons ce paragraphe en faisant voir qu'on peut toujours obtenir une forme réduite équivalente à une forme quelconque donnée (a, b, a'). Pour cela on formera la suite de formes

$$(a, b, a'), (a', b', a''), (a'', b'', a'''), \ldots,$$

dont chacune se déduit de celle qui la précède par le procédé indiqué ci-dessus, la seconde par exemple de la première, en déterminant b' par la double condition de satisfaire à la congruence $b' \equiv -b \pmod{a'}$ et d'être compris entre $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} - (a')$. Il est facile de s'assurer que les formes ainsi obtenues finiront par être toutes des réduites, et que cela aura lieu au plus tard lorsqu'on sera arrivé à une forme dont le premier coefficient ne surpasse pas numériquement le troisième, circonstance qui ne pourra manquer de se présenter, les entiers positifs

$$(a), (a'), (a''), \ldots$$

ne pouvant aller indéfiniment en décroissant.

» Il s'agit donc de prouver qu'une forme telle que

$$(A, B, C),$$

où $A \overset{=}{<} (C)$ et B est compris entre $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} - (A)$ est une forme réduite.

» En vertu de la dernière condition, on a

$$B = \sqrt{D} - Ab, \quad \sigma = \frac{-B + \sqrt{D}}{A}, \quad \frac{1}{\sigma} = \frac{-B - \sqrt{D}}{C},$$

la quantité σ étant numériquement inférieure à l'unité et de même signe que A. Il résulte des deux dernières équations et de la condition $(A) \overset{=}{<} (C)$, que les deux racines

$$\frac{-B - \sqrt{D}}{C}, \quad \frac{-B + \sqrt{D}}{C},$$

qui appartiennent à notre forme, sont, quant à leurs valeurs absolues, la première supérieure, la seconde inférieure à l'unité. La première racine étant ainsi numériquement supérieure à la seconde, B sera nécessairement positif, et l'on conclura ensuite de l'avant-dernière des équations ci-dessus, dans laquelle σ et A ont le même signe, que $B < \sqrt{D}$; d'où il suit enfin, d'après les expressions des deux racines, que ces racines ont des signes opposés. C. Q. F. D. »

SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

(Troisième article.)

Je conserve dans ce troisième article les notations des deux précédents. On se souvient que dans le premier article (inséré au cahier d'*avril*) je me suis occupé de quatre fonctions numériques bien connues

$$\varphi(m), \quad \int m, \quad \zeta(m), \quad \theta(m),$$

exprimant respectivement le nombre des entiers premiers à m et non plus grands que m, la somme des diviseurs de m, le nombre de ces diviseurs, enfin le nombre de manières dont m peut se décomposer en deux facteurs premiers entre eux. Dans le deuxième article (inséré au cahier de *juillet*) j'ai ajouté la fonction $\lambda(m)$ qui, pour $m = 1$, se réduit comme les autres à l'unité, et qui, pour m décomposé en facteurs premiers sous la forme

$$m = a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma,$$

donne

$$\lambda(m) = (-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\gamma}.$$

Comme on peut, sans inconvénient, ôter un nombre pair de la somme $\alpha + \beta + \ldots + \gamma$ qui sert d'exposant à -1, on voit que cette définition revient à dire que la valeur de $\lambda(m)$ est 1 ou -1, suivant qu'après avoir divisé m par le plus grand carré qui le mesure, on trouve les facteurs premiers (nécessairement inégaux) que la division laisse subsister, en nombre pair ou en nombre impair. On reconnaît ainsi que $\lambda(m)$ est une des fonctions numériques qui figurent dans les *Fundamenta* de Jacobi.

Quoique j'aie donné déjà un assez grand nombre de formules plus

ou moins curieuses concernant les fonctions

$$\varphi(m), \quad \int m, \quad \zeta(m), \quad \theta(m), \quad \lambda(m),$$

je ne crois pas déplaire à nos lecteurs en revenant encore sur ce sujet, non pour épuiser la matière, qui est vraiment inépuisable, mais pour montrer combien peuvent offrir de variété ces théorèmes, même bornés ainsi à la considération d'un petit nombre de fonctions.

Je m'en tiens, au surplus, cette fois encore, à un simple énoncé, auquel je joins un exemple numérique qui en fixe mieux le sens, et qui d'ailleurs est une sorte de garantie contre les fautes d'impression.

Désignons donc, à l'ordinaire, par d un diviseur quelconque du nombre entier positif m, et par δ le diviseur conjugué qui donne $m = d.\delta$.

Nous aurons d'abord cette formule :

$$\text{(I)} \qquad \sum \zeta(\delta^2)\varphi(d) = \sum \delta\theta(d),$$

où le signe $\sum$ s'applique, comme d'habitude, à tous les diviseurs d. Soit, pour exemple, $m = 6$. Cette formule nous dit que les deux expressions

$$\zeta(36)\varphi(1) + \zeta(9)\varphi(2) + \zeta(4)\varphi(3) + \zeta(1)\varphi(6)$$

et

$$6\theta(1) + 3\theta(2) + 2\theta(3) + \theta(6),$$

doivent être égales entre elles. Leur valeur commune est en effet 20.

J'écris ensuite cette autre formule, où $\zeta(\delta^2)$ figure également :

$$\text{(II)} \qquad \sum d\zeta(\delta^2) = \sum \theta(\delta) \int d$$

Pour $m = 6$, il faut donc que les deux quantités

$$\zeta(36) + 2\zeta(9) + 3\zeta(4) + 6\zeta(1)$$

et

$$\theta(6)\int 1 + \theta(3)\int 2 + \theta(2)\int 3 + \theta(1)\int 6$$

soient égales entre elles; elles ont, en effet, 30 pour commune valeur.

On trouve encore $\zeta(\delta^2)$, mais cette fois avec $\lambda(d)$, dans la formule

$$\text{(III)} \qquad \sum \zeta(\delta^2)\lambda(d) = \zeta(m).$$

C'est, pour $m = 6$, l'identité

$$\zeta(36) - \zeta(9) - \zeta(4) + \zeta(1) = 9 - 3 - 3 + 1 = 4 = \zeta(6).$$

De la formule (III) je rapproche celle-ci :

$$\text{(IV)} \qquad \sum \zeta(\delta)^2 \lambda(d)\theta(d) = \zeta(m),$$

où l'on n'a plus $\zeta(\delta^2)$, mais bien $\zeta(\delta)^2$. Pour $m = 6$, la formule (IV) donne l'identité

$$16 - 4.2 - 4.2 + 4 = 4.$$

On conclut d'ailleurs des formules (III) et (IV) comparées :

$$\sum \zeta(\delta)^2 \lambda(d)\theta(d) = \sum \zeta(\delta^2)\lambda(d).$$

A présent voici une équation entre les seules fonctions ζ et φ :

$$\text{(V)} \qquad \sum \varphi(d)\zeta(\delta)\zeta(\delta^\mu) = \sum d\zeta(\delta^{2\mu}).$$

L'exposant μ est un nombre entier positif. Si pourtant on voulait faire $\mu = 0$, on aurait encore un résultat exact, car on retomberait sur la formule (4) de notre premier article. Appliquée à $m = 3$, la formule (V) se réduit à l'identité :

$$\zeta(3)\zeta(3^\mu) + \varphi(3) = \zeta(3^{2\mu}) + 3,$$

dont les deux membres sont égaux à $2\mu + 4$.

En voici une autre entre ζ et θ :

$$\text{(VI)} \qquad \sum \theta(\delta)\zeta(d)\zeta(d^{\mu}) = \sum \zeta(\delta^2)\zeta(d^{2\mu}).$$

Pour $m = 3$, c'est l'identité

$$\theta(3) + \zeta(3)\zeta(3^{\mu}) = \zeta(9) + \zeta(3^{2\mu}) :$$

la valeur commune des deux membres est $2\mu + 4$.

Enfin en voici une entre $\int$ et ζ :

$$\text{(VII)} \qquad \sum \zeta(\delta^{2\mu}) \int d = \sum \delta\zeta(d)\zeta(d^{\mu}).$$

Pour $m = 3$, elle donne ce résultat exact

$$\zeta(3^{2\mu}) + \int 3 = 3 + \zeta(3)\zeta(3^{\mu}) :$$

la valeur commune des deux membres est $2\mu + 5$.

Je répète pour les formules (VI) et (VII) ce que j'ai dit pour la formule (V), relativement à l'exposant μ. Cet exposant est entier positif, mais on peut aussi le prendre égal à zéro : quand on lui donne cette valeur, la formule (VII), par exemple, se réduit à la formule (3) de notre premier article, et, par conséquent, reste exacte.

Jusqu'ici le signe $\sum$ portait sur les diverses valeurs du diviseur d et concernait tous les diviseurs de m. Nous allons maintenant le marquer d'un accent, et désormais il ne portera plus que sur les diviseurs D dont le carré D^2 divise aussi m. Cette notation a déjà été employée dans nos premiers articles.

On a

$$\text{(VIII)} \qquad \sum{}' \varphi(D)\zeta\left(\frac{m}{D^2}\right) = \sum{}' D\theta\left(\frac{m}{D^2}\right).$$

Soit, comme exemple, $m = 6$; on n'a qu'un seul diviseur carré D^2, savoir 1 ; ainsi on n'a à considérer que la seule valeur $D = 1$, et la for-

mule (VIII) se réduit à

$$\zeta(6) = \theta(6),$$

ce qui est exact, les deux membres étant égaux à 4.

Soit encore $m = 4$; alors D a ces deux valeurs 1 et 2, et la formule (VIII) exige que

$$\varphi(1)\zeta(4) + \varphi(2)\zeta(1) = \theta(4) + 2\theta(1):$$

or cela a lieu en effet, puisque 4 est la valeur commune des deux membres.

On a également

$$\text{(IX)} \qquad \sum{}'\theta(\mathrm{D})\zeta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right) = \sum \zeta(\mathrm{D}^2)\theta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right).$$

Prenons pour exemple le nombre 32 pour lequel on a trois valeurs de D, savoir $\mathrm{D} = 1$, $\mathrm{D} = 2$, $\mathrm{D} = 4$. La formule (IX) exige que les deux quantités

$$\theta(1)\zeta(32) + \theta(2)\zeta(8) + \theta(4)\zeta(2),$$

et

$$\zeta(1)\theta(32) + \zeta(4)\theta(8) + \zeta(16)\theta(2),$$

soient égales entre elles; elles ont, en effet, 18 pour valeur commune.

On sait que $\theta(m) = 2^\nu$, ν désignant le nombre des facteurs premiers inégaux de m; il s'ensuit que

$$\theta(\mathrm{D}) = \theta(\mathrm{D}^2),$$

en sorte que la formule (IX) peut s'écrire

$$\sum{}'\theta(\mathrm{D}^2)\zeta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right) = \sum{}'\zeta(\mathrm{D}^2)\theta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right):$$

si m était un carré, cette équation serait insignifiante, car alors D^2 et $\frac{m}{\mathrm{D}^2}$ représenteraient au même titre les diviseurs carrés de m; mais l'entier m est ici quelconque, et la symétrie parfaite des deux membres ne peut qu'ajouter à l'élégance de notre formule.

En voici une autre un peu plus compliquée, mais bien élégante

encore

$$\text{(X)} \qquad \sum{}' \zeta(\mathrm{D})\zeta(\mathrm{D}^{\mu})\theta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right) = \sum{}' \zeta(\mathrm{D}^{2\mu})\zeta\left(\frac{m}{\mathrm{D}^2}\right).$$

Appliquée au cas de $m = 4$, cette formule conduit à l'identité

$$\theta(4) + \zeta(2)\zeta(2^{\mu}) = \zeta(4) + \zeta(2^{2\mu}):$$

la somme vaut $2\mu + 4$ aux deux membres. L'exposant μ est comme précédemment un nombre entier positif ou zéro.

Dans les deux formules ci-après, on a tout à la fois des sommes $\sum$ relatives à tous les diviseurs d de m et des sommes $\sum{}'$ prises seulement par rapport aux diviseurs D dont le carré D^2 est aussi un diviseur de m.

L'une de ces formules, dans laquelle on rencontre encore un exposant positif ou nul, est

$$\text{(XI)} \qquad \sum \lambda(\delta)\zeta(d)\zeta(d^{\nu}) = \sum{}' \zeta\left(\frac{m^{2\nu}}{\mathrm{D}^{4\mu}}\right).$$

Voici l'autre

$$\text{(XII)} \qquad \sum \lambda(d)\int d = m\lambda(m)\sum{}' \frac{1}{\mathrm{D}^2}.$$

En les appliquant au cas de $m = 4$, on voit que la première exige l'égalité des deux expressions

$$1 - \zeta(2)\zeta(2^{\mu}) + \zeta(4)\zeta(4^{\mu})$$

et

$$\zeta(4^{2\nu}) + 1,$$

dont la valeur commune est $4\mu + 2$; quant à la seconde, elle se réduit à l'identité

$$\int 1 - \int 2 + \int 4 = 5 = 4\left(1 + \frac{1}{4}\right).$$

De même que l'on vient de considérer des sommes relatives aux seuls diviseurs D dont le carré D^2 est aussi un diviseur, on pourrait introduire des sommes concernant les seuls diviseurs dont une puissance donnée est aussi un diviseur de m. En voici un exemple. Désignons par Δ^4 un quelconque des diviseurs de m qui s'expriment par une quatrième puissance, ou, en d'autres termes, désignons par Δ un quelconque des diviseurs de m dont la quatrième puissance aussi divise m. Nous aurons

$$\text{(XIII)} \qquad \sum{}' \lambda(D)\zeta\left(\frac{m}{D^2}\right) = \sum{}'' \theta\left(\frac{m}{\Delta^4}\right).$$

La lettre D à laquelle se rapporte la somme marquée par $\sum'$ conserve la signification qu'elle avait plus haut. Mais la somme indiquée au second membre porte sur les diviseurs Δ qui ne font qu'une partie des diviseurs D, et nous avons accentué deux fois le signe $\sum$ qui s'applique à eux.

Soit comme exemple $m = 16$; les valeurs de D seront $D = 1, 2, 4$, et celles de Δ seulement 1 et 2. La formule (XIII), pour ce cas particulier, se réduira donc à l'identité

$$\zeta(16) - \zeta(4) + \zeta(1) = 3 = \theta(16) + \theta(1).$$

Je n'ai introduit jusqu'ici dans nos équations que des exposants simples. Mais ces exposants peuvent aussi quelquefois être eux-mêmes des puissances. Comme les formules où cette circonstance a lieu sont incommodes à écrire, je n'en présenterai que quelques-unes.

On a, avec un exposant composé 2^μ:

$$\text{(XIV)} \qquad \sum\left[\theta(d)^\mu\right] = \zeta\left(m^{2^\mu}\right).$$

Pour $m = 3$, cela conduit à l'identité

$$1 + 2^\mu = \zeta\left(3^{2^\mu}\right).$$

On a également

$$\text{(XV)} \qquad \sum\varphi(\delta)\zeta\left(d^{2^\mu}\right) = \sum\left[\delta\theta(d)^\mu\right].$$

On a encore cette formule double

$$\text{(XVI)} \qquad \sum \left[\theta(d)^{\mu}\zeta(\delta)\right] = \sum \zeta\left(d^{2^{\mu}}\right) = \zeta(m)\zeta\left(m^{2^{\mu-1}}\right).$$

J'ajoute l'équation

$$\text{(XVII)} \qquad \sum \zeta\left(d^{2^{\mu}}\right)\theta(\delta) = \sum \left[\theta(d)^{\mu}\zeta(\delta^2)\right].$$

Enfin je termine par la formule

$$\text{(XVIII)} \qquad \sum \zeta\left(d^{2^{\mu}}\right)\lambda(\delta) = \sum{}' \left[\theta\left(\frac{m}{D^2}\right)^{\mu}\right],$$

dans laquelle on retrouve à la fois des diviseurs d et des diviseurs D.

Les identités auxquelles nos quatre dernieres formules se réduisent quand $m = 3$ sont respectivement, pour la formule (XV),

$$\varphi(3)\zeta(1) + \varphi(1)\zeta\left(3^{2^{\mu}}\right) = 2^{\mu} + 3 = 3 + \theta(3)^{\mu};$$

pour la formule (XVI),

$$\zeta(3) + \theta(3)^{\mu} = 2^{\mu} + 2 = \zeta(1) + \zeta\left(3^{2^{\mu}}\right) = \zeta(3)\zeta\left(3^{2^{\mu-1}}\right);$$

pour la formule (XVII),

$$\zeta(1)\theta(3) + \zeta\left(3^{2^{\mu}}\right)\theta(1) = 2^{\mu} + 3 = \zeta(9) + \theta(3)^{\mu};$$

et enfin

$$\zeta(1)\lambda(3) + \zeta\left(3^{2^{\mu}}\right)\lambda(1) = 2^{\mu} = \theta(3)^{\mu}$$

pour la formule (XVIII).

SUR

LE POTENTIEL D'UNE COUCHE INFINIMENT MINCE COMPRISE ENTRE DEUX PARABOLOIDES ELLIPTIQUES;

PAR M. T. A. HIRST.

Le problème de l'attraction des couches paraboliques, dont une solution élégante a été donnée par M. Bourget dans un cahier récent de ce Journal (*voir* page 81), peut être abordé de la manière suivante. La formule pour le potentiel à laquelle notre méthode conduit dépend uniquement des logarithmes : il n'y reste aucun signe d'intégration.

1. Un système de deux paraboloïdes elliptiques égaux, dirigés du même côté et dont les axes sont sur une même droite, c'est-à-dire un système de deux paraboloïdes *isothétiques*, peut être regardé comme cas particulier d'un système de deux surfaces du second ordre, concentriques, semblables et semblablement placées. Par conséquent les deux parties d'une sécante quelconque interceptées par deux paraboloïdes isothétiques sont égales entre elles. De là on déduit immédiatement, par un théorème, bien connu, de Newton, que toute couche homogène comprise entre deux paraboloïdes isothétiques, et par suite toute couche hétérogène décomposable en de telles couches homogènes, n'exerce aucune action sur un point intérieur.

2. En se servant de cette propriété, on trouve, par des considérations géométriques élémentaires, les *surfaces de niveau* relatives à l'attraction d'une couche infiniment mince comprise entre deux paraboloïdes isothétiques. En effet, soit S un point quelconque d'un paraboloïde elliptique (ε) ayant ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe (ε_1) de la couche. On sait que le pôle A, par rapport à la surface externe (ε_1), du plan tangent en S à la surface (ε) est situé sur la normale en S à cette même surface [*]. Donc toute transversale menée par A, qui rencontre le plan tangent en

[*] Voir la Note I à la suite du Mémoire.

un point A_1 et la surface externe (ε) aux points M, M_1, sera divisée harmoniquement ; de sorte que l'angle ASA_1 étant droit, l'angle MSM_1 sera divisé en deux parties égales par la normale SA. Mais par le théorème de Newton, on sait que les attractions exercées par les éléments de masse dm, dm_1, situés aux extrémités de la corde MM_1 sur le point intérieur A, sont égales entre elles, d'où l'on déduit

$$dm : dm_1 = \overline{MA}^2 : \overline{M_1A}^2 = \overline{MS}^2 : \overline{M_1S}^2,$$

c'est-à-dire que ces mêmes éléments attirent un point situé en S avec des forces égales ; de sorte que la résultante de ces forces est dirigée suivant la normale SA [*]. Le même raisonnement s'appliquant également aux éléments situés aux extrémités de chaque corde qui passe par le point A, on en conclut que l'attraction effective de la couche entière sur un point quelconque d'une surface ayant ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche, est dirigée suivant la normale à cette surface. Ce sont donc les surfaces de niveau relatives à l'attraction de la couche.

5. Connaissant ces surfaces de niveau, on trouve le potentiel V de la couche, et ensuite les composantes de l'attraction, en suivant une méthode qui a été employée avec succès par Laplace dans le cas d'une sphère [**], et par M. Chasles dans celui d'une couche ellipsoïdale [***].

On sait, en effet, que V étant constant pour tous les points d'une même surface de niveau, peut être regardé comme fonction du paramètre ε contenu dans l'équation générale de ces surfaces :

$$(1) \qquad \frac{y^2}{2p+4\varepsilon} + \frac{z^2}{2q+4\varepsilon} - x - \varepsilon = 0,$$

et qu'alors l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

[*] Cette démonstration est au fond la même que celle donnée par M. Steiner dans le *Journal de Crelle*, tome XII.

[**] *Mécanique céleste*, livre II, chapitre II, art. 2.

[***] *Journal de l'École Polytechnique*, XVe cahier.

donne pour V une expression de la forme

$$(2) \qquad V = A \int \frac{d\varepsilon}{\varphi(\varepsilon)} + B,$$

où A et B sont des constantes arbitraires, et $\varphi(\varepsilon)$ une fonction qu'on déduit de l'équation (1) au moyen de la condition

$$\frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = \left(\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2}\right) : \left[\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)^2\right] [*].$$

Mettons, pour abréger,

$$R = 1 + \frac{4y^2}{(2p+4\varepsilon)^2} + \frac{4z^2}{(2q+4\varepsilon)^2};$$

en différentiant l'équation (1), on a

$$(3) \qquad \frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{1}{R}, \quad \frac{d\varepsilon}{dy} = \frac{1}{R} \cdot \frac{2y}{2p+4\varepsilon}, \quad \frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{1}{R} \cdot \frac{2z}{2q+4\varepsilon},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)^2 = \frac{1}{R}.$$

La différentiation des équations (3) donne, après quelques réductions faciles, l'expression

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2} = \frac{2}{R}\left(\frac{1}{2p+4\varepsilon} + \frac{1}{2q+4\varepsilon}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = 2\left(\frac{1}{2p+4\varepsilon} + \frac{1}{2q+4\varepsilon}\right),$$

et, par une intégration facile,

$$\varphi(\varepsilon) = \sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}.$$

La constante qu'il faudrait ajouter ici peut être regardée comme un fac-

---

[*] *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes*, par M. G. Lame, page 6.

teur de A dans la valeur (2) de V, qui, par substitution, devient

$$V = A \int \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}} + B.$$

Cette intégrale ne dépend évidemment que des logarithmes et s'obtient facilement. En effet, ε_1 étant le paramètre de la surface externe de la couche, on peut mettre V sous la forme

$$(4)\quad V = \sqrt{(2p+4\varepsilon_1)(2q+4\varepsilon_1)}\left(A' \log \frac{\sqrt{2p+4\varepsilon}+\sqrt{2q+4\varepsilon}}{\sqrt{2p+4\varepsilon}-\sqrt{2q+4\varepsilon}} + B'\right),$$

où A′ et B′ sont de nouvelles constantes que nous allons déterminer [*].

4. Au moyen des formules connues

$$X = -\mu f \frac{dV}{dx} = -\mu f \frac{dV}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dx}, \text{ etc.},$$

et à l'aide des équations (3) et (4), on trouve facilement les valeurs des composantes, et ensuite celle de l'attraction totale F de la couche (ε_1) sur un point S, (x, y, z) quelconque situé sur la surface (ε), et ayant la masse μ. Cette attraction totale, qui est dirigée, comme on sait, suivant la normale en S, aura pour valeur

$$\mu f \frac{dV}{d\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)^2},$$

et par conséquent s'exprimera ainsi :

$$F = 4\mu f A' \frac{\sqrt{(2p+4\varepsilon_1)(2q+4\varepsilon_1)}}{\sqrt{(2p+4\varepsilon)(2q+4\varepsilon)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

f désignant l'attraction de l'unité de masse sur une masse égale placée à l'unité de distance. L'attraction totale sur un point (x_1, y_1, z_1) de la surface externe elle-même sera

$$F_1 = 4\mu f A' \frac{1}{\sqrt{R_1}},$$

[*] Voir la Note II à la suite du Mémoire.

si R devient R_1 lorsqu'on remplace x, y, z, ε par x_1, y_1, z_1, ε_1 M. Bourget trouve, par des considérations géométriques directes, la valeur

$$F_1 = 4\pi\mu f \rho\omega \frac{1}{\sqrt{R_1}},$$

ρ désignant la densité et ω l'épaisseur de la couche estimée suivant une direction parallèle à son axe. La comparaison de ces deux valeurs donne

$$A' = \pi\rho\omega.$$

5. Pour déterminer la constante B', cherchons directement la valeur du potentiel par rapport au sommet O de la surface externe (ε_1). Un rayon vecteur OA de cette surface, dont les coordonnées polaires sont θ et φ, aura évidemment la valeur

$$OA = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} : \left(\frac{\cos^2\varphi}{2p + 4\varepsilon_1} + \frac{\sin^2\varphi}{2q + 4\varepsilon_1}\right),$$

et le potentiel d'un élément de masse, par rapport à l'origine, est

$$r\,dr\,\rho \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Cette expression, intégrée par rapport à r entre les limites convenables, donne pour le potentiel de la partie de la couche comprise dans un cône d'une ouverture infiniment petite ayant son sommet en O, la valeur

$$\frac{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2}{2} \rho \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

B et C étant les points où l'axe du cône rencontre la surface interne de la couche. Mais

$$OA - OC = AC = OB = \frac{\omega}{\cos\theta}, \qquad \frac{OA + OC + OB}{2} = OA;$$

par conséquent l'expression ci-dessus devient

$$\rho\omega \frac{d\varphi}{\dfrac{\cos^2\varphi}{2p + 4\varepsilon_1} + \dfrac{\sin^2\varphi}{2q + 4\varepsilon_1}} \cdot \frac{d\theta}{\sin\theta}.$$

Le potentiel de la couche entière par rapport au sommet de sa surface

externe, lequel résultera de l'intégration de cette expression entre les limites : 0 et 2π pour φ et 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour θ, a évidemment une valeur infinie à cause du second facteur ; ce qui entraîne nécessairement la condition

$$B' = \infty .$$

NOTE I.

Ce théorème, qui se trouve énoncé dans l'*Aperçu historique* de M. Chasles (page 397), n'est qu'un corollaire d'un autre théorème relatif aux cônes circonscrits à une surface quelconque du second ordre, lequel, pour le cas des surfaces à centre, a été démontré par le même auteur dans le *Recueil des Savants étrangers*, tome IX. Voici une démonstration directe de notre théorème.

L'équation du plan tangent en S (x', y', z') à la surface (ε) [voir l'équation (1) du Mémoire) est

$$\frac{2yy'}{2p+4\varepsilon} + \frac{2zz'}{2q+4\varepsilon} - x - x' - 2\varepsilon = 0,$$

et celle du plan polaire d'un point quelconque (ξ, η, ζ), par rapport à la surface externe (ε_1), est

$$\frac{2y\eta}{2p+4\varepsilon_1} + \frac{2z\zeta}{2q+4\varepsilon_1} - x - \xi - 2\varepsilon_1 = 0.$$

Ces équations seront évidemment identiques, et (ξ, η, ζ) deviendra le pôle du plan tangent en S, si

$$\frac{2y'}{2p+4\varepsilon} = \frac{2\eta}{2p+4\varepsilon_1} = \frac{(\eta - y')}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon)},$$
$$\frac{2z'}{2q+4\varepsilon} = \frac{2\zeta}{2q+4\varepsilon_1} = \frac{(\zeta - z')}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon)},$$
$$(\xi - x') = -2(\varepsilon_1 - \varepsilon).$$

De là résulte que le pôle A, par rapport à (ε_1), du plan tangent en S à

la surface (ε) est nécessairement un point de la normale en S à cette surface (ε), puisque l'on a

$$\frac{\xi - x'}{-1} = \frac{\eta - y'}{\dfrac{2y'}{2p + 4\varepsilon}} = \frac{\zeta - z'}{\dfrac{2z'}{2q + 4\varepsilon}} = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon).$$

NOTE II.

En se servant d'une propriété des points correspondants énoncée dans le théorème V de M. Bourget (voir page 83), on déduit facilement, de la valeur du potentiel V d'une couche (ε_1) par rapport à un point quelconque de la surface (ε), celle du potentiel V_1 d'une couche (ε) par rapport au point correspondant de la surface (ε_1), et, par conséquent aussi, par rapport à un point intérieur quelconque, vu que V_1 a la même valeur partout dans l'intérieur de la couche. En effet,

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)}}{\sqrt{(2p + 4\varepsilon_1)(2q + 4\varepsilon_1)}},$$

donc

$$V_1 = \sqrt{(2p + 4\varepsilon)(2q + 4\varepsilon)}\left(A' \log \frac{\sqrt{2p - 4\varepsilon} + \sqrt{2q + 4\varepsilon}}{\sqrt{2p + 4\varepsilon} - \sqrt{2q + 4\varepsilon}} + B'\right).$$

On voit donc que V et V_1, quoique tous deux infinis à cause de la constante B', ne dépendent que des logarithmes et non pas des transcendantes elliptiques de première espèce, comme l'énonce M. Bourget (voir théorème XIII, page 89), et comme cela a lieu dans le cas général d'une couche ellipsoïdale infiniment mince.

NOTE

SUR UNE PROPRIÉTÉ D'UN SYSTÈME DE COURBES PLANES;

PAR M. T. A. HIRST.

Soient

$$r = \frac{1}{u} = f(\theta),$$

l'équation polaire d'une courbe quelconque, s l'arc et $p = \frac{1}{\omega}$ la longueur variable de la perpendiculaire menée du pôle à une tangente. On sait que l'on a

$$(1) \qquad \frac{d\theta}{p} = \frac{ds}{r^2} = d\theta\sqrt{u^2 + u'^2},$$

où $u' = \frac{du}{d\theta}$. Donc l'intégrale générale de l'équation

$$(2) \qquad u^2 + u'^2 = \omega^2,$$

ω étant regardé comme une fonction donnée de θ, représente un système de courbes dont les tangentes menées par des points situés sur un rayon vecteur quelconque sont également éloignées du pôle.

Concevons maintenant qu'en chaque point de ces courbes se trouve de la matière capable d'agir à distance selon la loi newtonienne, et que la densité de cette matière, quoique variable d'un point à un autre de chaque courbe, soit la même pour tous les points situés sur un même rayon vecteur. L'équation (1) fait voir que :

Les attractions effectives exercées sur le pôle par tous les arcs de ces courbes qui sont compris entre deux rayons vecteurs quelconques sont égales entre elles et dirigées suivant une même droite.

J'ai déjà examiné quelques cas particuliers de l'équation (2) (voir *Philosophical Magazine*, vol. XIII, 1857); mais je réserve pour un prochain travail une discussion plus complète de cette question.

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE L'ARITHMÉTIQUE INDIENNE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On trouve dans les productions arithmétiques des Indiens un grand nombre de théorèmes dont la démonstration est à la vérité bien facile aujourd'hui, mais dont l'élégance frappera toujours. Tel est celui d'après lequel la somme

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3,$$

des cubes des nombres naturels, est égale au carré de la somme des nombres eux-mêmes, c'est-à-dire est égale à

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Pour généraliser ce théorème, écrivons-le d'abord (en remplaçant n par $1 + \alpha$) sous la forme abrégée

$$\sum (1 + \alpha')^3 = \left[\sum (1 + \alpha')\right]^2,$$

les sommations étant relatives à α', qui doit prendre successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha$.

Si $\beta, \ldots, \gamma$ désignent d'autres entiers, on aura de même

$$\sum (1 + \beta')^3 = \left[\sum (1 + \beta')\right]^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum (1 + \gamma')^3 = \left[\sum (1 + \gamma')\right]^2,$$

les sommes étant prises de $\beta' = 0$ à $\beta' = \beta, \ldots$, de $\gamma' = 0$ à $\gamma' = \gamma$.

Or, en multipliant toutes ces équations membre à membre, il vient

$$\sum \cdots \sum (1 + \alpha')^3 \ldots (1 + \gamma')^3 = \left[\sum \cdots \sum (1 + \alpha') \ldots (1 + \gamma')\right]^2.$$

D'un autre côté, si l'on considère un nombre m décomposé en facteurs premiers, de manière que

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots c^{\gamma},$$

on voit qu'un quelconque de ses diviseurs (1 et m compris) peut être représenté par

$$d = a^{\alpha'} b^{\beta'} \ldots c^{\gamma'},$$

α' variant comme ci-dessus de 0 à α, β' de 0 à $\beta, \ldots$, γ' de 0 à γ. De plus, en désignant par $\zeta(d)$ le nombre des diviseurs de d, on a

$$\zeta(d) = (1 + \alpha')(1 + \beta') \ldots (1 + \gamma').$$

L'équation à laquelle nous sommes arrivés plus haut conduit donc à cette formule curieuse

$$\sum \zeta(d)^3 = \left[\sum \zeta(d)\right]^2,$$

où le signe $\sum$ s'applique à tous les diviseurs d, et qui se présente, on le voit, comme une simple généralisation du théorème indien.

Pour donner un exemple de l'utilité dont cette formule peut être dans la théorie des nombres, supposons que m soit un nombre impair n'ayant que des facteurs premiers de la forme $4\mu + 1$. On sait que $\zeta(m)$ exprime alors le nombre des décompositions du double de m en une somme de deux carrés impairs, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + y^2,$$

x, y désignant des nombres impairs positifs, et deux solutions étant regardées comme différentes quand x et y n'y ont pas identiquement les mêmes valeurs.

Il est clair que d sera aussi un nombre impair n'ayant, comme m qu'il divise, que des facteurs premiers de la forme $4\mu + 1$, et que $\zeta(d)$ sera le nombre des décompositions de $2d$ en une somme de deux carrés impairs.

Cela étant, notre formule fournit le théorème que voici :

« Étant donné un entier impairement pair et qui n'ait aucun facteur » de la forme $4\mu + 3$, décomposez tous ses diviseurs pairs (dont l'en- » tier donné lui-même fait partie) en une somme de deux carrés im- » pairs, et cherchez pour chaque diviseur le nombre total des décom- » positions en deux carrés dont il est susceptible : la somme des cubes » de ces nombres sera égale au carré de la somme de ces nombres » eux-mêmes. »

Ainsi 50 ou 2.25 a les trois diviseurs pairs 50, 10 et 2. On trouve pour le premier trois décompositions :

$$50 = 7^2 + 1^2 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2;$$

pour le second, deux décompositions :

$$10 = 3^2 + 1^2 = 1^2 + 3^2;$$

enfin, pour le troisième, une seule décomposition :

$$2 = 1 + 1.$$

Et l'on a bien

$$3^3 + 2^3 + 1^3 = 6^2.$$

Ainsi encore 130, ou 2.5.13, a quatre diviseurs pairs

$$130, \quad 26, \quad 10, \quad 2,$$

pour lesquels les nombres de décompositions sont respectivement

$$4, \quad 2, \quad 2, \quad 1,$$

et l'on a, conformément à notre théorème,

$$4^3 + 2^3 + 2^3 + 1^3 = 9^2.$$

Ce théorème subsiste, au surplus, même pour un nombre impairement pair ayant des facteurs premiers de la forme $4\mu + 3$, mais sous la condition que ces facteurs soient tous inégaux.

Ainsi 70 ou 2.5.7 a les quatre diviseurs pairs 70, 14, 10 et 2 dont les deux derniers seuls sont décomposables en une somme de deux carrés,

savoir 10 de deux manières $9+1$, $1+9$, et 2 d'une seule manière $1+1$: de là les nombres 0, 0, 2 et 1 pour lesquels on a bien

$$0^3+0^3+2^3+1^3=(0+0+2+1)^2.$$

Mais le théorème ne s'applique pas aux nombres divisibles deux ou plusieurs fois par un même nombre premier de la forme $4\mu+3$. Prenons, pour fixer les idées, le nombre 98 ou 2.7^2. Il a trois diviseurs pairs 2, 14, 98 dont le premier et le dernier se décomposent d'une seule manière en une somme de deux carrés; le second se refuse à cette forme : nous avons donc ici les trois nombres 1, 0, 1, et la somme de leurs cubes est 2, tandis que le carré de leur somme est 4.

J'indiquerai, en terminant, une autre conséquence du théorème indien rappelé plus haut. Continuons à désigner par d un diviseur quelconque de m, et soit δ le quotient de m par d, en sorte que $m=d.\delta$. En représentant par $\varphi_1(m)$ la somme des nombres premiers à m que contient la suite $1, 2, 3, \ldots, m$, et par $\varphi_3(m)$ la somme de leurs cubes, on aura

$$\sum \delta^3 \varphi_3(d) = \left[\sum \delta \varphi_1(d)\right]^2:$$

le signe $\sum$ s'applique naturellement à tous les diviseurs d. L'équation que je viens d'écrire résulte immédiatement du théorème cité, combiné avec la formule générale

$$\sum \delta^s \varphi_s(d) = 1^s+2^s+3^s+\ldots+m^s,$$

que j'ai donnée au tome XLIV des *Comptes rendus* (page 753), et où $\varphi_s(m)$ marque la somme des puissances $s^{\text{ièmes}}$ des nombres premiers à m contenus dans la suite $1, 2, 3, \ldots, m$.

PROPRIÉTÉS
DES COURBES A DOUBLE COURBURE DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. CHASLES.

I.

1. On appelle *courbe à double courbure du troisième ordre*, une courbe à double courbure qu'un plan quelconque ne rencontre qu'en trois points (dont deux peuvent être imaginaires).

2. La courbe d'intersection de deux cônes du second ordre qui ont une génératrice commune satisfait à cette condition, et, par conséquent, est une courbe à double courbure du troisième ordre.

Réciproquement, toute courbe à double courbure du troisième ordre peut être considérée comme l'intersection de deux cônes du second ordre ayant leurs sommets en deux points quelconques de la courbe.

Cela résulte de cette propriété caractéristique de la courbe à double courbure du troisième ordre, savoir, que *tout cône qui passe par la courbe et qui a son sommet en un de ses points est du deuxième ordre.*

En effet, tout plan mené par le sommet du cône ne le coupe que suivant deux arêtes, ce qui prouve qu'il est du deuxième ordre.

3. *Six points donnés dans l'espace déterminent une courbe à double courbure du troisième ordre.*

Car deux de ces points peuvent être pris pour sommets de deux cônes du deuxième ordre passant par les six points et ayant une arête commune. La courbe d'intersection de ces deux cônes passe par les six points.

4. Comme l'expression *courbe à double courbure du troisième ordre* doit se présenter dans toutes les nombreuses propositions qui vont suivre, on éprouve le besoin d'une dénomination plus simple. C'est

pourquoi nous appellerons la courbe dont il s'agit, *courbe gauche du troisième ordre*.

II.

Propriétés d'une courbe à double courbure, ou courbe gauche, du troisième ordre dérivées du rapport anharmonique et de la considération des figures homographiques.

5. *Étant pris cinq points fixes sur une courbe gauche du troisième ordre, les droites menées de ces cinq points à chacun des autres points de la courbe forment des angles pentaèdres (ou faisceaux de cinq droites) homographiques entre eux.*

6. On en conclut que :

Les deux faisceaux formés par les rayons menés de deux points fixes d'une courbe gauche du troisième ordre, à tant d'autres points de la courbe qu'on voudra, sont homographiques.

7. Ces deux propriétés constituent une analogie remarquable entre les courbes gauches du troisième ordre et les coniques planes. Car la seconde exprime, dans ses propres termes, la propriété fondamentale des sections coniques; et quant à la première, elle correspond à cet énoncé, savoir, que le faisceau de quatre droites menées de quatre points fixes d'une conique à un cinquième point quelconque de la courbe, a toujours le même rapport anharmonique; ce qu'on peut exprimer en d'autres termes, en disant que ces quatre droites forment un faisceau qui est toujours homographique à un même faisceau fixe.

Il y a donc, à l'égard de ces deux propriétés, une analogie parfaite entre les coniques planes et les courbes gauches du troisième ordre.

Ces propriétés concernent les points, tant des sections coniques que des courbes gauches; or on sait que les tangentes aux coniques donnent lieu à des propriétés semblables et non moins importantes : nous verrons plus loin (55) que ces propriétés des tangentes ont aussi leurs analogues dans les courbes gauches du troisième ordre, non pas précisément à l'égard des tangentes à ces courbes, mais à l'égard de leurs plans osculateurs.

8. *Quand on a deux faisceaux de rayons, dans l'espace, homographiques entre eux, le lieu des points de rencontre de deux rayons homologues est une courbe gauche du troisième ordre.*

Et *si l'on considère dans les deux faisceaux deux plans homologues, leur droite d'intersection s'appuie toujours sur la courbe en deux points (lesquels peuvent être imaginaires).*

9. *Quand deux droites s'appuient, chacune en deux points, sur une courbe gauche du troisième ordre, si autour de ces deux droites on fait tourner deux plans se coupant toujours sur la courbe, ces deux plans forment, autour des deux droites fixes, deux faisceaux homographiques.*

10. On peut dire encore que :

Si par quatre points fixes d'une courbe gauche du troisième ordre on mène quatre plans se coupant suivant une même droite qui s'appuie en deux autres points quelconques de la courbe, le rapport anharmonique de ces quatre plans a toujours la même valeur, quelle que soit cette droite.

Cette droite peut être une tangente à la courbe. Par conséquent :

Si par chaque tangente à une courbe gauche du troisième ordre on mène quatre plans passant respectivement par quatre points fixes pris sur la courbe, le rapport anharmonique de ces quatre plans a toujours la même valeur.

11. *Si autour d'une droite fixe passant par un point de la courbe gauche du troisième ordre, on fait tourner un plan qui rencontre la courbe en deux autres points, la droite qui joint ces deux points engendre un hyperboloïde qui passe par la courbe proposée.*

12. *Étant donnés six points d'une courbe gauche du troisième ordre, construire la courbe par points.*

Soient a, b, c, d, O et O′ les six points donnés Que par les deux O, O′ on mène un plan quelconque P; ce plan rencontrera la courbe en un troisième point m que l'on construit ainsi. On considère le plan P comme appartenant au faisceau des quatre rayons Oa, Ob, Oc, Od, et l'on détermine le plan homologue P′ dans le faisceau des quatre rayons O′a, O′b, O′c, O′d considéré comme homographique au premier. Ce plan P′ passe par le point O′ et coupe le premier suivant une droite. Considérant cette droite comme un rayon du deuxième faisceau, on détermine son homologue dans le premier faisceau. Le

point d'intersection des deux droites est le point de la courbe que l'on cherche.

Autrement. Les quatre points a, b, c, d, pris trois à trois, déterminent quatre plans. Que par la droite OO′ on mène un plan quelconque qui rencontre ces quatre premiers suivant quatre droites, et que l'on conçoive la conique tangente à ces quatre droites et à la cinquième OO′; les tangentes à cette conique, menées par les points O et O′, se rencontreront en un point qui appartiendra à la courbe cherchée.

III.

Courbe gauche du troisième ordre considérée sur un hyperboloïde à une nappe.

13. *La courbe gauche du troisième ordre ne peut se trouver sur une surface du second ordre, qu'autant que cette surface est engendrée par une ligne droite, et est, par conséquent, un hyperboloïde à une nappe, lequel peut être, dans les cas particuliers, un paraboloïde hyperbolique, ou un cône, ou un cylindre.*

14. *Quand une courbe gauche du troisième ordre est tracée sur un hyperboloïde à une nappe, elle rencontre en deux points toutes les génératrices d'un même système de génération, et en un seul point toutes les génératrices du deuxième système.*

15. *Une surface du deuxième ordre quelconque ne rencontre une courbe gauche du troisième ordre qu'en six points (réels ou imaginaires).*

D'où il suit que :

Quand un hyperboloïde à une nappe rencontre une courbe gauche du troisième ordre en sept points, cette courbe est tout entière sur l'hyperboloïde.

16. *Par une courbe gauche du troisième ordre et par une droite qui s'appuie en un seul point sur la courbe, on peut faire passer un hyperboloïde; les génératrices de cette surface qui s'appuient sur la droite donnée rencontrent la courbe, chacune en deux points.*

17. On conclut de là que :

Par un point quelconque de l'espace, on peut toujours mener une droite (et on n'en peut mener qu'une), qui s'appuie en deux points sur une courbe gauche du troisième ordre.

18. Par conséquent :

La perspective, ou la projection d'une courbe gauche du troisième ordre sur un plan, est une courbe du troisième ordre ayant toujours un point double ou conjugué.

19. *Quand une droite s'appuie en deux points sur une courbe gauche du troisième ordre, on peut mener par un point pris arbitrairement dans l'espace un hyperboloïde passant par la courbe et par la droite.*

Tous les hyperboloïdes ainsi déterminés ont pour intersection commune la courbe et la droite.

20. *Quand deux droites s'appuient, chacune en deux points, sur une courbe gauche du troisième ordre, ces deux droites et la courbe sont sur un même hyperboloïde.*

21. *Si une droite qui s'appuie en deux points sur une courbe gauche du troisième ordre est l'arête commune à plusieurs angles dièdres en involution, les cordes que ces angles interceptent dans la courbe forment un hyperboloïde.*

22. Réciproquement : *Quand une courbe gauche du troisième ordre est tracée sur un hyperboloïde, dont elle rencontre en deux points toutes les génératrices d'un même système* (**14**), *si par une droite fixe quelconque qui s'appuie en deux points sur la courbe, on mène deux plans passant par les deux points où la courbe rencontre chacune de ces génératrices, les couples de plans ainsi menés forment des angles dièdres en involution.*

23. Cette proposition conduit à une solution simple du problème suivant :

Une courbe gauche du troisième ordre étant tracée sur un hyperboloïde, déterminer les deux génératrices de l'hyperboloïde qui sont tangentes à cette courbe.

IV.

Courbe gauche du troisième ordre considérée sur deux hyperboloïdes.

24. *On peut faire passer par une courbe gauche du troisième ordre une infinité d'hyperboloïdes ayant pour génératrice commune une droite qui s'appuie en deux points sur la courbe.*

25. *Quand une courbe gauche du troisième ordre est l'intersection de deux hyperboloïdes à la fois, ces deux hyperboloïdes ont nécessairement une génératrice commune.*

26. *Quand une courbe gauche du troisième ordre est l'intersection de deux hyperboloïdes qui ont une génératrice commune, cette courbe rencontre cette génératrice et toutes celles qui appartiennent au même système de génération dans chacun des deux hyperboloïdes, en deux points, et les génératrices du deuxième système de génération en un seul point.*

27. *Quand autour de trois droites données dans l'espace on fait tourner trois plans formant trois faisceaux homographiques (ou, en d'autres termes, se correspondant anharmoniquement), le point d'intersection de ces trois plans décrit une courbe gauche du troisième ordre.*

V.

Deux courbes gauches du troisième ordre tracées sur un même hyperboloïde.

28. *Quand deux courbes gauches du troisième ordre tracées sur un même hyperboloïde rencontrent chacune en deux points une même génératrice, ces deux courbes se rencontrent en quatre points;*

Et quand les deux courbes rencontrent, l'une en deux points et l'autre en un seul point, une même génératrice, elles se rencontrent en cinq points.

29. Puisque deux courbes gauches du troisième ordre tracées sur un hyperboloïde, et qui rencontrent chacune en deux points une même génératrice, ne se rencontrent qu'en quatre points, il s'ensuit que :

Trois hyperboloïdes qui ont une génératrice commune ne se rencontrent qu'en quatre points.

30. *Quand deux courbes gauches du troisième ordre ont cinq points communs, on peut faire passer par ces deux courbes un hyperboloïde.*

31. *Par cinq points d'un hyperboloïde, on peut faire passer deux courbes gauches du troisième ordre tracées sur la surface de l'hyperboloïde.*

32. *Étant données sur un hyperboloïde deux courbes gauches du troisième ordre qui rencontrent une même génératrice chacune en deux points, construire les quatre points d'intersection de ces deux courbes.*

33. *Etant donnés cinq points dans l'espace et une droite, construire la courbe gauche du troisième ordre qui passe par ces cinq points et qui s'appuie en deux points sur la droite.*

VI.

Systèmes de courbes gauches du troisième ordre tracées sur un même hyperboloïde et passant par quatre mêmes points.

34. *Quand plusieurs courbes gauches du troisième ordre, décrites sur un hyperboloïde, passent par quatre mêmes points et rencontrent chacune en deux points une même génératrice,*

1°. *Les segments faits par ces courbes sur cette droite sont en involution.*

2°. *Ces segments correspondent anharmoniquement aux points dans lesquels les courbes rencontrent une génératrice du second système de génération de l'hyperboloïde.*

35. On conclut aisément de cette proposition la solution des questions suivantes :

Par quatre points donnés sur un hyperboloïde, faire passer une courbe gauche du troisième ordre qui soit tangente à une génératrice donnée.

Plus généralement, *par quatre points d'un hyperboloïde, mener sur cette surface une courbe gauche du troisième ordre qui intercepte sur une génératrice un segment de grandeur donnée.*

36. *Par cinq points d'un hyperboloïde, mener sur cette surface une courbe gauche du troisième ordre qui rencontre en deux points les génératrices d'un même système de génération.*

37. *Etant donnés trois points sur un hyperboloïde et deux génératrices d'un même système de génération, on peut tracer sur l'hyperboloïde quatre courbes gauches du troisième ordre passant par les trois points et tangentes aux deux droites.*

VII.

Surface développable dont la courbe gauche du troisième ordre est l'arête de rebroussement. — Plans osculateurs à la courbe en divers points.

38. *Par une droite donnée, on peut mener quatre plans tangents à une courbe gauche du troisième ordre.*

39. *La surface développable formée par les tangentes à une courbe gauche du troisième ordre est du quatrième ordre.*

40. *Par un point donné, on ne peut mener que trois plans tangents à cette surface.*

En d'autres termes : *Par un point donné, on ne peut mener que trois plans osculateurs à la courbe gauche du troisième ordre.*

41. *Les points de contact de ces trois plans osculateurs avec la courbe sont dans un plan passant par le point donné.*

42. Il résulte de là que : *Connaissant les plans osculateurs en trois points de la courbe, on construit immédiatement le plan osculateur en un quatrième point quelconque.*

43. On conclut encore du théorème précédent cette propriété remarquable :

Toute courbe gauche du troisième ordre peut prendre un mouvement infiniment petit dans lequel tous ses points se dirigent suivant les normales aux plans osculateurs en ces points [*].

44. *La développable formée par les tangentes à une courbe gauche du troisième ordre a pour trace sur un plan quelconque une courbe du quatrième ordre ayant trois points de rebroussement, lesquels sont les points d'intersection de la courbe gauche par le plan.*

45. *Quand le plan est tangent à la courbe proposée, la trace de la développable sur ce plan est du troisième ordre et a un point double.*

---

[*] On sait qu'une certaine courbe gauche du troisième ordre jouit de cette autre propriété, qu'*elle peut prendre un mouvement infiniment petit dans lequel tous les points se dirigent vers un même point de l'espace, suivant les arêtes d'un cône du second ordre.* (Voir *Comptes rendus*, tome XVI, page 1424, année 1843.)

46. *Si le plan est osculateur à la courbe, et, par conséquent, tangent à la développable, il coupe cette surface suivant une conique.*

47. *Si par un point on mène des droites parallèles aux tangentes à une courbe gauche du troisième ordre, ces droites forment un cône du quatrième ordre qui a trois arêtes de rebroussement.*

VIII.

Corrélation entre les points d'une courbe gauche du troisième ordre et les plans osculateurs à la courbe en ces points.

48. Il résulte du théorème (45) que :

Les points d'une courbe gauche étant considérés comme formant une première figure, les plans osculateurs à la courbe en ces points forment une figure corrélative [*].

49. Cette simple proposition suffit pour donner lieu immédiatement à une foule de propriétés nouvelles des courbes gauches du troisième ordre; car ces propriétés seront les corrélatives (selon la loi de dualité) de toutes celles qui précèdent.

On en conclura en particulier diverses égalités de rapports anharmoniques.

50. Par exemple, *Etant pris six points* a, b, c, d, e, f *d'une courbe gauche du troisième ordre, si par les deux points* e, f *on mène quatre plans passant respectivement par les quatre premiers, le rapport anharmonique de ces quatre plans est égal à celui des quatre points dans lesquels la droite d'intersection des plans osculateurs en* e *et* f *rencontre les quatre plans osculateurs en* a, b, c, d.

51. *Une tangente quelconque à une courbe gauche du troisième ordre rencontre quatre plans osculateurs fixes en quatre points dont le rapport anharmonique est constant, quelle que soit cette tangente.*

52. *Si l'on conçoit cinq plans osculateurs à la courbe gauche du troisième ordre, un sixième quelconque coupe ces cinq premiers suivant cinq droites qui forment une figure toujours homographique à une même figure.*

---

[*] Voir *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, page 676.

53. *Si l'on conçoit les plans osculateurs en deux points fixes d'une courbe gauche du troisième ordre, les droites suivant lesquelles les plans osculateurs en tant d'autres points qu'on voudra coupent ces deux premiers, forment toujours deux figures homographiques.*

C'est ce théorème et le précédent qui constituent dans les courbes gauches du troisième ordre l'analogie entre leurs plans osculateurs et les tangentes des sections coniques, dont il a été question plus haut (**7**).

54. *Si l'on prend deux points fixes* a, b *d'une courbe gauche du troisième ordre, et un troisième point quelconque de la courbe* m, *le rapport des distances de ce point aux plans osculateurs en* a *et* b *est au rapport des distances du plan osculateur en* m *aux deux points* a, b, *dans une raison constante.*

Etc., etc.

IX.

Surfaces réglées passant par une courbe gauche du troisième ordre.

55. *Si une droite qui s'appuie en deux points sur une courbe gauche du troisième ordre est l'arête commune à deux faisceaux de plans homographiques, les cordes interceptées dans la courbe entre les couples de plans homologues des deux faisceaux, formeront une surface du quatrième ordre.*

Ainsi, par exemple, *si les cordes sont interceptées entre les côtés d'un angle dièdre de grandeur constante, tournant autour de son arête fixe qui s'appuie en deux points de la courbe, ces cordes forment une surface du quatrième ordre.*

Observation. — Par chaque point de la courbe gauche proposée passent deux génératrices de la surface, de sorte que cette courbe est une ligne de striction de la surface réglée du quatrième ordre.

Si les deux faisceaux homographiques sont en involution, la surface devient un hyperboloïde, comme il a été dit précédemment (**21**).

56. *Etant données une courbe gauche du troisième ordre et une droite fixe dans l'espace, si, par chaque point de cette droite, on mène une autre droite qui s'appuie en deux points sur la courbe, le lieu de ces droites est une surface du quatrième ordre.*

En d'autres termes :

Si, autour d'une droite fixe, on fait tourner un plan qui rencontre

une courbe gauche du troisième ordre en trois points, le lieu des droites qui joignent ces points deux à deux est une surface du quatrième ordre.

57. *La surface réglée dont les génératrices s'appuient chacune en un point d'une courbe gauche du troisième ordre et sur deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, est du sixième ordre.*

58. Corollaires. — *Si l'une des deux droites rencontre la courbe en un point, la surface n'est que du cinquième ordre.*

59. *Si les deux droites s'appuient chacune en un point sur la courbe, ou bien si l'une s'appuie sur la courbe en deux points et que l'autre ait une position quelconque dans l'espace, la surface n'est que du quatrième ordre.*

60. *Si l'une des droites s'appuie en deux points sur la courbe, et l'autre en un point seulement, la surface n'est plus que du troisième ordre.*

Enfin, si les deux droites s'appuient chacune en deux points sur la courbe, la surface devient un hyperboloïde à une nappe, comme il a été dit précédemment (**20**).

SUR UNE RELATION ENTRE DEUX FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soient $f(m)$ et $F(m)$ deux fonctions numériques de l'entier m, en sorte que pour chaque valeur donnée de m, $f(m)$ et $F(m)$ prennent des valeurs déterminées. Admettons de plus qu'en désignant par d un diviseur quelconque de m, et par $\sum$ une somme relative à tous les diviseurs d, on ait

$$\text{(A)} \qquad \sum f(d) = F(m).$$

Cette relation entre les fonctions $f(m)$ et $F(m)$ en entraînera beaucoup d'autres dont j'espère un jour m'occuper. Je profite de la page qui reste libre ici pour en indiquer une.

Soit δ le quotient de m par d, c'est-à-dire soit $m = d\delta$. Si le nombre m est pair, l'équation (A) entraînera la suivante :

$$\text{(B)} \qquad \sum (-1)^{\delta-1} f(d) = F(m) - 2F\left(\frac{m}{2}\right).$$

Il est inutile d'ajouter que si m était impair, on aurait évidemment

$$\sum (-1)^{\delta-1} f(d) = \sum f(d) = F(m),$$

puisqu'alors l'exposant $\delta - 1$ serait essentiellement pair.

La formule (B) pourra souvent être utile. J'ignore si quelqu'un l'a donnée déjà. Connue ou non, elle méritait, je crois, d'être mise sous les yeux de nos jeunes lecteurs; elle pourra leur servir à tirer plusieurs formules nouvelles des formules déjà si nombreuses que nous avons données au sujet des fonctions numériques.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME ÉNONCÉ DANS L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On admet que, pour tout nombre entier, pair ou impair, $m = d\delta$, on a

$$\text{(A)} \qquad \sum f(d) = \mathrm{F}(m),$$

le signe sommatoire du premier membre s'appliquant à tous les diviseurs d de m, et l'on demande d'en conclure la valeur de

$$\sum (-1)^{\delta-1} f(d).$$

Comme dans le cas de m impair, l'exposant $\delta - 1$ est essentiellement pair, on a alors tout de suite

$$\sum (-1)^{\delta-1} f(d) = \sum f(d) = \mathrm{F}(m).$$

Le cas de m pair, $m = 2n$, est donc le seul dont nous ayons à nous occuper.

Distinguons les valeurs impaires de δ des valeurs paires, en désignant les premières par δ_1 et les autres par δ_2. Comme on a

$$d = \frac{m}{\delta},$$

les valeurs de d se partageront aussi en deux classes, et l'on aura

$$\sum (-1)^{\delta-1} f(d) = \sum f\left(\frac{m}{\delta_1}\right) - \sum f\left(\frac{m}{\delta_2}\right),$$

les sommes à faire au second membre étant respectivement relatives

à δ_1 et à δ_2. La formule (A) pourra aussi s'écrire

$$\sum f\left(\frac{m}{\delta_1}\right) + \sum f\left(\frac{m}{\delta_2}\right) = \mathrm{F}(m).$$

Appliquons cette même formule (A) au nombre n ou $\frac{m}{2}$. Il est clair que $\frac{m}{\delta_2}$ est un diviseur de ce nombre, puisqu'il donne le quotient entier $\frac{1}{2}\delta_2$. Réciproquement tout diviseur k de $\frac{m}{2}$ devant donner le quotient entier

$$\frac{m}{2k} = h,$$

on en conclut que

$$k = \frac{m}{2h} = \frac{m}{\delta_2},$$

en prenant pour δ_2 le diviseur pair $2h$ de m. Les diviseurs de m sont donc exprimés par $\frac{m}{\delta_2}$, et la formule (A) nous donne en conséquence

$$\sum f\left(\frac{m}{\delta_2}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{m}{2}\right).$$

En retranchant le double de cette équation de l'équation obtenue plus haut,

$$\sum f\left(\frac{m}{\delta_1}\right) + \sum f\left(\frac{m}{\delta_2}\right) = \mathrm{F}(m),$$

on trouve

$$\sum f\left(\frac{m}{\delta_1}\right) - \sum f\left(\frac{m}{\delta_2}\right) = \mathrm{F}(m) - 2\,\mathrm{F}\left(\frac{m}{2}\right),$$

et par conséquent

$$\text{(B)} \qquad \sum (-1)^{\delta-1} f(d) = \mathrm{F}(m) - 2\,\mathrm{F}\left(\frac{m}{2}\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans un curieux travail inséré au tome IV de la 6e série des *Mémoires*

de l'Académie de Saint-Pétersbourg, M. Bouniakowsky a été conduit à s'occuper d'une expression qui, avec nos notations actuelles, peut s'écrire

$$\sum (-1)^{\delta} d,$$

ou, en changeant le signe,

$$\sum (-1)^{\delta-1} d.$$

Quand m est impair, on a évidemment

$$\sum (-1)^{\delta} d = -\int m,$$

en désignant avec Euler par $\int m$ la somme des diviseurs de m. M. Bouniakowsky arrive aussi à une expression simple quand m est une puissance de 2. Mais il ne paraît pas avoir vu qu'en général on a, pour m pair,

$$\sum (-1)^{\delta-1} d = \int m - 2\int \frac{m}{2},$$

comme cela résulte de notre formule (B), en y prenant $f(d) = d$, ce qui réduit la formule (A) à l'identité

$$\sum d = \int m.$$

Ainsi, pour m pair, on a cette formule élégante

$$\sum (-1)^{\delta} d = 2\int \frac{m}{2} - \int m,$$

qui pourra servir à compléter en un point de détail le beau Mémoire de l'habile géomètre que nous venons de nommer.

Le Mémoire de M. Bouniakowsky est intitulé : *Recherches sur différentes lois nouvelles relatives à la somme des diviseurs des nombres*. Il a été présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg le 11 février 1848 et imprimé la même année. J'aurais dû le citer (dans le cahier de sep-

tembre 1856) à l'occasion de la formule

$$\sum\left[n - 5\frac{m(m+1)}{2}\right]\int(2n + 1 - m^2 - m) = 0;$$

car cette formule est une de celles que donne M. Bouniakowsky qui, lui aussi du reste, ne la présente que comme la conséquence immédiate et évidente d'une équation de Jacobi bien connue. Au surplus, si j'ai manqué ici de mémoire, nos lecteurs y gagneront : je me propose, en effet, de mettre bientôt sous leurs yeux une analyse détaillée que M. Bouniakowsky (à cette occasion même) a faite de son travail pour le rappeler aux géomètres. Cet extrait en donnera une idée exacte et fixera l'attention des savants sur un genre de recherches qui offre beaucoup d'intérêt.

SUR

UN POINT DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS BINOMES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le 20 avril dernier j'ai communiqué à l'Académie des Sciences une Note sous ce même titre : elle a été insérée dans les *Comptes rendus*, tome XLIV, page 798. Je la reproduis d'abord textuellement, puis j'ajoute quelques remarques qui la complètent.

I.

« Soit p un nombre premier impair, et

$$X = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$$

l'équation binôme de degré p débarrassée de la racine réelle 1 et réduite à n'avoir plus que des racines imaginaires

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \ldots, \quad \alpha^{p-1},$$

représentées par les puissances de la quantité

$$\alpha = e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}} = \cos\frac{2\pi}{p} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{p}.$$

On sait qu'en désignant chacun des exposants $1, 2, 3, \ldots, p-1$ par a ou b, suivant que cet exposant est ou n'est pas résidu quadratique de p, on décompose l'équation

$$X = 0$$

en deux autres, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $\sqrt{\pm p}$, et qui ont pour racines, l'une les puissances α^a, l'autre les puissances α^b. Posons

$$2\Pi(x - \alpha^b) = Y + Z\sqrt{\pm p},$$

et

$$2\Pi(x-\alpha^a) = Y - Z\sqrt{\pm p},$$

en affectant p, sous le radical, du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que p est de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n-1$, le signe Π indiquant à l'ordinaire un produit. Y et Z seront des polynômes à coefficients entiers; le premier Y, de degré $\frac{p-1}{2}$ et commençant par le terme $2x^{\frac{p-1}{2}}$; le second Z, de degré inférieur. On aura

$$4X = Y^2 \mp pZ^2;$$

l'équation $X = 0$ se décomposera donc en ces deux-ci :

$$Y + Z\sqrt{\pm p} = 0, \quad Y - Z\sqrt{\pm p} = 0.$$

Ce beau théorème est dû à Gauss.

» Pour qu'il n'y ait rien d'indécis relativement à nos notations, je prendrai la valeur de $\sqrt{p}$ toujours positivement, et j'entendrai par $\sqrt{-p}$ le produit $\sqrt{p}\sqrt{-1}$. Cela posé, je me hasarde à dire, après Gauss, Legendre, etc., quelques mots à mon tour sur les moyens que l'on peut employer pour déterminer les deux polynômes Y et Z, ou, ce qui revient au même, le polynôme unique

$$U = Y + Z\sqrt{\pm p}, \quad \text{ou} \quad V = Y - Z\sqrt{\pm p}.$$

» En désignant par U′ la dérivée $\frac{dU}{dx}$ de U, et de même par X′ la dérivée de X, et en représentant par $\varphi(x)$ un certain polynôme à coefficients entiers dont j'écrirai plus bas la valeur, je trouve que l'on a

$$\frac{2U'}{U} = \frac{X' - \varphi(x)\sqrt{\pm p}}{X}.$$

Or l'équation $X = 0$ n'ayant pas de racines égales, l'équation $U = 0$ n'en a pas non plus. La fraction

$$\frac{2U'}{U}$$

est donc irréductible, et on devra l'obtenir en réduisant à sa plus simple expression la fraction placée au second membre. D'après cela : Cherchez le plus grand commun diviseur des deux polynômes X et $X' - \varphi(x)\sqrt{\pm p}$, et multipliez-le par une constante de manière que son premier terme soit $2x^{\frac{p-1}{2}}$. Vous formerez ainsi le polynôme $V = Y - Z\sqrt{\pm p}$. Le polynôme U s'en déduira en changeant le signe du radical, comme en divisant 4X par V; et l'on en conclura Y et Z en séparant les termes rationnels de ceux qui sont multipliés par $\sqrt{\pm p}$.

» Mais une élégante proposition de Gauss que je rappellerai en terminant cette Note permettait déjà de former U par la division, et a conduit Legendre à une méthode plus simple encore dans la pratique et fondée sur la considération des sommes de puissances semblables des racines. Le procédé sur lequel je veux appeler surtout l'attention de l'Académie est d'un genre différent, et il a pour caractère essentiel de permettre de former à priori un terme isolé quelconque de U.

» L'équation

$$\frac{2U'}{U} = \frac{X' - \varphi(x)\sqrt{\pm p}}{X},$$

dont je tire en passant ce résultat curieux

$$ZY' - YZ' = 2\varphi(x),$$

où Y' et Z' marquent les dérivées de Y et Z, fournit en effet par l'intégration une valeur de U très-remarquable qui mène au but indiqué.

» Donnons d'abord la valeur du polynôme $\varphi(x)$. Pour cela, faisons usage d'un signe de Legendre, et désignons comme lui par

$$\left(\frac{m}{p}\right)$$

l'unité prise avec le signe + ou avec le signe −, suivant que l'entier m, premier à p, est ou n'est pas résidu quadratique de p. Alors on a, sous la forme la plus concise,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-1}\left[\left(\frac{1}{p}\right)x^{p-2} + \left(\frac{2}{p}\right)x^{p-3} + \ldots + \left(\frac{p-2}{p}\right)x + \left(\frac{p-1}{p}\right)\right].$$

Le numérateur

$$\left(\frac{1}{p}\right) x^{p-2} + \left(\frac{2}{p}\right) x^{p-3} + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right)$$

est divisible par $x - 1$ en vertu de la formule connue

$$\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right) = 0.$$

En effectuant la division, on trouve

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{p}\right) x^{p-3} + \left[\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right)\right] x^{p-4} + \left[\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + \left(\frac{3}{p}\right)\right] x^{p-5} + \ldots$$
$$- \left[\left(\frac{p-2}{p}\right) + \left(\frac{p-1}{p}\right)\right] x - \left(\frac{p-1}{p}\right),$$

ou l'on a simplifié la dernière moitié des coefficients au moyen de l'équation citée

$$\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right) = 0.$$

» Nous sommes assurés par là que $\varphi(x)$ est bien une fonction entière; mais la première expression est la plus commode. On en conclut facilement que

$$\int_x^\infty \frac{\varphi(x)\,dx}{X} = \left(\frac{1}{p}\right)\frac{1}{x} + \left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{2x} + \ldots = \sum \left(\frac{m}{p}\right)\frac{1}{mx^m},$$

le signe $\sum$ s'appliquant à tous les entiers m premiers à p. Si donc on effectue l'intégration dont j'ai parlé plus haut, et qu'on pose, pour abréger,

$$\lambda = \frac{1}{2}\sum \left(\frac{m}{p}\right)\frac{1}{mx^m},$$

on aura

$$U = 2\sqrt{X}\,.\,e^{\lambda\sqrt{\pm p}}.$$

Maintenant, puisque U est un simple polynôme, il est clair qu'on l'obtiendra en développant le second membre suivant les puissances

descendantes de x, sans s'inquiéter des termes affectés d'un exposant négatif qui doivent disparaître d'eux-mêmes. Ceci rappelle le beau Mémoire sur l'élimination que Lagrange a donné dans le Recueil de l'Académie de Berlin. Je n'ai pas à insister ici sur les simplifications de détail dont le calcul est susceptible, ni sur les formes diverses qu'on peut lui faire prendre. On pourra évidemment réduire la suite infinie λ à ceux de ses termes qui ont de l'influence sur la valeur de U, ou plutôt sur les termes de U qu'on veut former. On pourra aussi remplacer $\sqrt{X}$ par

$$x^{\frac{p-1}{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ou bien encore par

$$x^{\frac{p-1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x}\right)},$$

c'est-à-dire par

$$x^{\frac{p-1}{2}}.e^{\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\cdots},$$

en ne prenant, comme pour λ, qu'un nombre limité de termes dans la série qui sert d'exposant. Si donc on demande le terme de U, qui est multiplié par

$$x^{\frac{p-1}{2}-\mu},$$

on n'aura qu'à développper des exponentielles de la forme

$$e^{\frac{g}{x^s}}$$

s ne surpassant pas μ, et à chercher dans leur produit le terme qui répond à l'exposant $-\mu$ de x.

» Notre fonction $\varphi(x)$ a une liaison intime avec celle-ci :

$$f(x)=\left(\frac{1}{p}\right)x+\left(\frac{2}{p}\right)x^2+\left(\frac{3}{p}\right)x^3+\ldots+\left(\frac{p-1}{p}\right)x^{p-1},$$

qui entre dans la belle formule de Gauss

$$f(\alpha^m) = \left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{\pm p}, \quad \text{ou} \quad = 0,$$

suivant que l'entier m est ou non premier à p. J'ai fait allusion plus haut à cette formule : elle montre que U est aussi le plus grand commun diviseur des deux polynômes X et $f(x) + \sqrt{\pm p}$. »

II.

L'équation fondamentale

$$\frac{2\,U'}{U} = \frac{X' - \varphi(x)\sqrt{\pm p}}{X}$$

peut être établie de différentes manières, et, par exemple, comme il suit :

La fonction que nous désignons ici par $\varphi(x)$ est liée à la fonction $f(x)$ de la formule de Gauss, de telle sorte qu'on a

$$(x-1)\,\varphi(x) = x^{p-1} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si donc on fait $x = \alpha^m$, m désignant un des nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$, et par suite α^m étant une quelconque des racines de l'équation $X = 0$, il viendra

$$(\alpha^m - 1)\,\varphi(\alpha^m) = \alpha^{mp-m} f(\alpha^{-m}) = \alpha^{-m} f(\alpha^{-m}).$$

Mais on a

$$f(\alpha^{-m}) = \left(\frac{-m}{p}\right)\sqrt{\pm p},$$

d'où

$$f(\alpha^{-m}) = \pm\left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{\pm p},$$

en prenant partout les signes supérieurs ou partout les signes inférieurs, suivant que p est de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n-1$.

Donc

$$(\alpha^m - 1)\,\varphi(\alpha^m) = \pm\left(\frac{m}{p}\right)\alpha^{-m}\sqrt{\pm p},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\alpha^m}{p}(\alpha^m - 1)\,\varphi(\alpha^m)\sqrt{\pm p} = \left(\frac{m}{p}\right).$$

Cela posé, décomposons la fraction rationnelle

$$\frac{\varphi(x)\sqrt{\pm p}}{X}$$

en fractions simples, de manière à avoir

$$\frac{\varphi(x)\sqrt{\pm p}}{X} = \sum \frac{C_m}{x - \alpha^m},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{(x-1)\,\varphi(x)\sqrt{\pm p}}{x^p - 1} = \sum \frac{C_m}{x - \alpha^m}.$$

Le coefficient C_m s'obtiendra, d'après la règle ordinaire, en faisant $x = \alpha^m$ dans l'expression

$$\frac{(x-1)\,\varphi(x)\sqrt{\pm p}}{p x^{p-1}}.$$

Des lors on trouvera facilement

$$C_m = \frac{\alpha^m}{p}(\alpha^m - 1)\,\varphi(\alpha^m)\sqrt{\pm p} = \left(\frac{m}{p}\right),$$

c'est-à-dire

$$C_m = 1,$$

quand m est un des nombres a, résidus quadratiques de p, et

$$C_m = -1,$$

quand m est un des non-résidus b.

Nous voyons par là que

$$\frac{\varphi(x)\sqrt{\pm p}}{X} = \sum \frac{1}{x-\alpha^a} - \sum \frac{1}{x-\alpha^b}.$$

Mais déjà

$$\frac{X'}{X} = \sum \frac{1}{x-\alpha^a} + \sum \frac{1}{x-\alpha^b}.$$

Donc

$$\frac{X' - \varphi(x)\sqrt{\pm p}}{X} = 2\sum \frac{1}{x-\alpha^b} = \frac{2U'}{U},$$

ce qu'il fallait démontrer.

III.

Nous devons en second lieu expliquer comment on arrive à l'équation

$$\int_x^\infty \frac{\varphi(x)\,dx}{X} = \left(\frac{1}{p}\right)\frac{1}{x} + \left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{2x^2} + \ldots = \sum \left(\frac{m}{p}\right)\frac{1}{mx^m},$$

où le signe $\sum$ s'applique à tous les entiers m premiers à p, en sorte que l'on a une suite infinie, qui sera convergente si l'on suppose avec nous $x > 1$.

D'après l'expression de $\varphi(x)$, on a

$$\frac{\varphi(x)}{X} = \frac{(x-1)\varphi(x)}{x^p-1} = \frac{1}{x^p-1}\left[\left(\frac{1}{p}\right)x^{p-2} + \left(\frac{2}{p}\right)x^{p-3} + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right)\right].$$

Mais, dans l'hypothèse de $x > 1$,

$$\frac{1}{x^p-1} = \frac{1}{x^p} + \frac{1}{x^{2p}} + \frac{1}{x^{3p}} + \ldots.$$

La fraction

$$\frac{\varphi(x)}{X}$$

est donc la somme des quantités suivantes :

$$\left(\frac{1}{p}\right)\frac{1}{x^2}+\left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{x^3}+\ldots+\left(\frac{p-1}{p}\right)\frac{1}{x^p},$$
$$\left(\frac{1}{p}\right)\frac{1}{x^{p+2}}+\left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{x^{p+3}}+\ldots+\left(\frac{p-1}{p}\right)\frac{1}{x^{2p}},$$
$$\left(\frac{1}{p}\right)\frac{1}{x^{2p+2}}+\left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{x^{2p+3}}+\ldots+\left(\frac{p-1}{p}\right)\frac{1}{x^{3p}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et si l'on remplace, comme on en a le droit,

$$\left(\frac{1}{p}\right),\ \left(\frac{2}{p}\right),\ldots,\ \left(\frac{p-1}{p}\right)$$

par

$$\left(\frac{p+1}{p}\right),\ \left(\frac{p+2}{p}\right),\ldots,\ \left(\frac{2p-1}{p}\right)$$

dans la seconde de ces quantités, puis par

$$\left(\frac{2p+1}{p}\right),\ \left(\frac{2p+2}{p}\right),\ldots,\ \left(\frac{3p-1}{p}\right)$$

dans la troisième, et ainsi de suite, on verra facilement que la somme dont il s'agit peut s'écrire

$$\sum\left(\frac{m}{p}\right)\frac{1}{x^{m+1}},$$

en prenant successivement pour m les nombres naturels $1, 2, 3,\ldots, p-1, p+1,\ldots$, à l'infini, à l'exclusion des multiples de p.

Ayant ainsi

$$\frac{\varphi(x)}{X}=\sum\left(\frac{m}{p}\right)\frac{1}{x^{m+1}},$$

on en conclura, en intégrant, la formule

$$\int_x^\infty\frac{\varphi(x)\,dx}{X}=\sum\left(\frac{m}{p}\right)\frac{1}{mx^m},$$

qu'il s'agissait d'établir, et où le signe $\sum$ s'applique, je le répète, à tous les entiers m premiers à p.

IV.

Après les développements dans lesquels nous venons d'entrer, tout devient facile, et les indications données au § I montrent suffisamment à nos lecteurs comment on peut trouver sous diverses formes le coefficient de tel terme qu'on voudra de la fonction entière

$$U = 2x^{\frac{p-1}{2}} + A_1 x^{\frac{p-1}{2}-1} + \ldots,$$

par exemple le coefficient A_μ du terme où figure

$$x^{\frac{p-1}{2}-\mu}.$$

Bornons-nous à transcrire ici une des expressions auxquelles on arrive pour ce coefficient A_μ.

Désignons par $k_1, k_2, \ldots, k_m, \ldots, k_\mu$ un quelconque des groupes de nombres entiers non négatifs pour lesquels on a

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m + \ldots + \mu k_\mu = \mu,$$

Pour chaque groupe $k_1, k_2, \ldots, k_m, \ldots, k_\mu$ remplissant la condition voulue, formons le produit

$$\Pi \left[\frac{1 + \left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{\pm p}}{2}\right]^{k_m} \frac{1}{m^{k_m}\Gamma(k_m+1)},$$

où le signe de multiplication Π se rapporte à m qui doit prendre les valeurs $1, 2, 3, \ldots, \mu$, et où le signe Γ est employé avec la signification que lui a donnée Legendre. Le double de la somme de ces produits sera égal à A_μ.

Nous écrirons donc

$$A_\mu = 2\sum \Pi \left[\frac{1 + \left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{\pm p}}{2}\right]^{k_m} \frac{1}{m^{k_m}\Gamma(k_m+1)}.$$

Pour $\mu = 1$, on ne peut prendre que $k_1 = 1$, et notre formule fournit

$$A_1 = 1 + \sqrt{\pm p};$$

pour $\mu = 2$, on a les deux groupes $k_1 = 2$, $k_2 = 0$, et $k_1 = 0$, $k_2 = 1$: notre formule donne donc

$$A_2 = \frac{1}{4}(3 \pm p) + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{2}{p}\right)\right]\sqrt{\pm p}.$$

Et ainsi de suite.

Indépendamment des développements algébriques qui donnent pour A_μ des expressions de formes très-diverses dont la comparaison ne serait pas sans intérêt, on pourrait aussi exprimer A_μ par une intégrale définie.

Nous avons supposé le nombre p premier. Il y a, comme on sait, des théorèmes analogues pour les équations binômes de degré composé, et notre méthode se prête très-bien à une telle extension.

NOTE A L'OCCASION D'UN MÉMOIRE DE M. BOUNIAKOWSKY;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Dans un Mémoire faisant suite aux Recherches sur les sommes des diviseurs des nombres dont il a été question plus haut (page 411), et qui est intitulé *Nouvelle méthode pour la théorie des formes quadratiques* et inséré au tome V, 6e série, des Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg, M. Bouniakowsky a donné le théorème suivant : « Tout nombre premier $16k + 7$ est nécessairement de la forme » $2u^2 + Qv^2$, Q représentant un nombre premier $8c + 5$ ». La méthode de l'auteur est fondée sur cette double propriété de la somme des diviseurs d'un nombre m, de n'avoir une valeur impaire que quand m est un carré ou le double d'un carré, et de n'avoir une valeur impairement paire que quand m est le produit d'un carré par un nombre premier de la forme $4n + 1$ (élevé à la puissance 1 ou $4\mu + 1$), ou par le double d'un tel nombre. Cette propriété facile à établir était connue d'Euler, qui s'en est servi dans un travail sur les nombres parfaits; mais c'est à M. Bouniakowsky qu'on doit d'en avoir révélé toute l'importance en en faisant la base d'une méthode générale et en tirant de beaux théorèmes.

En mettant à mon tour à profit l'idée heureuse de M. Bouniakowsky, j'ai obtenu des résultats analogues aux siens. Je citerai en particulier le théorème suivant, dont je donnerai plus tard la démonstration détaillée : « Le double d'un nombre premier de la forme $8\mu + 3$ s'ex- » prime toujours par la somme d'un carré et du produit d'un autre » carré par un nombre premier de la forme $8\mu + 5$ ». En d'autres termes, si p est un nombre premier $8\mu + 3$, on a nécessairement l'équation

$$2p = x^2 + qy^2,$$

q désignant un autre nombre premier de la forme $8\nu + 5$.

SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

(Quatrième article.)

Je conserve avec la signification qu'elles avaient dans nos trois premiers articles (cahiers d'*Avril*, de *Juillet* et de *Novembre*) les fonctions $\varphi(m)$, $\theta(m)$, $\lambda(m)$ et $\zeta(m)$; mais je substitue à la fonction $\int m$, qui marquait la somme des diviseurs de m, une autre fonction plus générale $\zeta_\mu(m)$ qui désignera la somme des puissances de degré μ de ces diviseurs. Ainsi on aura

$$\zeta_\mu(m) = \sum (d^\mu).$$

L'exposant μ est quelconque : on peut le prendre positif ou négatif, entier ou fractionnaire, comme on voudra. Je remarque du reste que les valeurs négatives de μ peuvent etre remplacées par des valeurs positives, au moyen de cette formule aisée à établir :

$$m^\mu \zeta_{-\mu}(m) = \zeta_\mu(m).$$

Quand $\mu = 1$, la fonction $\zeta_\mu(m)$ devient $\zeta_1(m)$; c'est donc par $\zeta_1(m)$ que désormais s'exprimera l'ancienne fonction $\int m$. Quand $\mu = 0$, $\zeta_\mu(m)$ devient $\zeta_0(m)$, ou plutôt $\zeta(m)$, car alors nous n'écrirons pas l'indice. On voit que $\zeta(m)$ continue à exprimer le nombre des diviseurs de m

La fonction $\zeta_\mu(m)$ jouit comme les fonctions $\varphi(m)$, $\theta(m)$, $\lambda(m)$, $\zeta(m)$ et $\int m$ de la propriété fondamentale que voici. Soit $f(m)$ une quelconque de ces fonctions. On a

$$f(1) = 1;$$

et pour l'entier quelconque m, décomposé en facteurs premiers sous la forme

$$m = a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma,$$

$f(m)$ se décompose aussi en facteurs et s'exprime par le produit

$$f(m) = f(a^\alpha) f(b^\beta) \ldots f(c^\gamma),$$

de sorte que quand la fonction $f(m)$ est connue pour les puissances de nombres premiers, elle l'est pour tous les autres nombres. Ce dernier fait résulte pour $\zeta_{\mu'}(m)$ de la formule suivante, qui s'offre d'elle-même :

$$\zeta_\mu(m) = \frac{a^{\mu(\alpha+1)}-1}{a^\mu-1} \cdot \frac{b^{\mu(\beta+1)}-1}{b^\mu-1} \cdots \frac{c^{\mu(\gamma+1)}-1}{c^\mu-1}.$$

Les fonctions qui jouissent de la double propriété indiquée par les équations

$$f(1) = 1, \quad f(m) = f(a^\alpha) f(b^\beta) \ldots f(c^\gamma),$$

offrent dans leur étude des facilités particulières. Il s'ensuit, par exemple, que pour établir les formules de nos trois premiers articles et celles dont je vais parler ici, on n'a besoin que de traiter le cas où m est une puissance de nombre premier, c'est-à-dire le cas de $m = a^\alpha$. De là un mode de démonstration simple et qui ne s'appliquerait pas à une fonction numérique non décomposable en facteurs. J'entrerai plus tard à ce sujet dans tous les détails convenables; mais dès à présent le lecteur peut se faire une idée de la marche à suivre en prenant pour type la démonstration que j'ai donnée de la formule

$$\sum \zeta(d)^3 = \left[\sum \zeta(d)\right]^2,$$

dans le dernier cahier de ce Journal (voir page 393). Du reste, c'est au fond de cette manière que M. Catalan a démontré ou plutôt vérifié (tome IV, 1re série, page 7) l'équation de Gauss

$$\sum \varphi(d) = m.$$

Pour la plupart de nos formules, une telle vérification est on ne peut plus facile. Quelquefois cependant elle exige des détails d'algèbre et l'établissement préliminaire de certains résultats qui ne sont pas tout d'abord évidents. C'est ainsi que pour arriver à l'équation

$$\sum \int d \int \delta = \sum d\zeta(d)\zeta(\delta),$$

il faut prouver l'égalité des deux expressions suivantes :

$$\sum (1 + a + a^2 + \ldots + a^{\alpha'})(1 + a + a^2 + \ldots + a^{\alpha - \alpha'})$$

et

$$\sum (1 + \alpha')(1 + \alpha - \alpha')a^{\alpha'},$$

où le signe sommatoire $\sum$ porte sur α' qui doit prendre successivement toutes les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, \alpha$.

Quoi qu'il en soit, je me borne pour le moment à cette indication rapide d'un premier procédé qui suffira à nos lecteurs pour établir par eux-mêmes celles de nos formules qui leur paraîtront dignes d'intérêt. Plus tard nous le développerons et nous ajouterons d'autres méthodes. En attendant continuons à poser quelques équations du même genre que celles qui ont précédé, mais on figurera la nouvelle fonction $\zeta_\mu(m)$.

Je trouve d'abord

$$(\alpha) \qquad \sum \zeta_\mu(d)\varphi(\delta) = m\zeta_{\mu-1}(m).$$

Ainsi, pour $m = 6$, les deux quantités

$$1 + 2^\mu + 3^\mu + 6^\mu + 1 + 3^\mu + 2(1 + 2^\mu) + 2$$

et

$$6(1 + 2^{\mu-1} + 3^{\mu-1} + 6^{\mu-1})$$

doivent être et sont en effet égales entre elles.

J'ai ensuite

$$(\beta) \qquad \sum d^{\mu} \zeta_{\nu}(\delta) = \sum d^{\nu} \zeta_{\mu}(\delta).$$

Ainsi, pour $m = 6$, la somme

$$6^{\mu} + 3^{\mu}(1 + 2^{\nu}) + 2^{\mu}(1 + 3^{\nu}) + 1 + 2^{\nu} + 3^{\nu} + 6^{\nu}$$

est égale à

$$6^{\nu} + 3^{\nu}(1 + 2^{\mu}) + 2^{\nu}(1 + 3^{\mu}) + 1 + 2^{\mu} + 3^{\mu} + 6^{\mu}.$$

On a, en troisième lieu,

$$(\gamma) \qquad \sum \theta(d) \zeta_{\mu}(\delta) = \sum d^{\mu} \zeta(\delta^2).$$

C'est, pour $m = 6$,

$$4 + 2(1 + 2^{\mu}) + 2(1 + 3^{\mu}) + 1 + 2^{\mu} + 3^{\mu} + 6^{\mu} = 6^{\mu} + 3.3^{\mu} + 3.2^{\mu} + 9.$$

Ensuite vient la formule

$$(\delta) \qquad \sum \lambda(d) \zeta(d^2) \zeta_{\mu}(\delta) = \sum d^{\mu} \zeta(\delta) \lambda(\delta),$$

qui, pour $m = 6$, exprime l'égalité des deux quantités

$$1 + 2^{\mu} + 3^{\mu} + 6^{\mu} - 3(1 + 3^{\mu}) - 3(1 + 2^{\mu}) + 9$$

et

$$6^{\mu} - 2.3^{\mu} - 2.2^{\mu} + 4.$$

Dans les formules ci-après, comme déjà dans la formule (β), les fonctions ζ_{μ} figurent seules, avec différents indices.

On a

$$(\varepsilon) \qquad \sum d^{\mu} \zeta_{\mu}(\delta) = \sum d^{\mu} \zeta(d).$$

Ainsi, pour $m = 6$, la somme

$$6^\mu + 3^\mu(1 + 2^\mu) + 2^\mu(1 + 3^\mu) + 1 + 2^\mu + 3 + 6^\mu$$

est égale à

$$4 . 6^\mu + 2 . 3^\mu + 2 . 2^\mu + 1.$$

On a encore

$$(\zeta) \qquad \sum d^\mu \zeta_\mu(d) = \sum \delta^{2\mu} \zeta_\mu(d).$$

C'est, pour $m = 6$, l'égalité entre

$$6^\mu(1 + 2^\mu + 3^\mu + 6^\mu) + 3^\mu(1 + 3^\mu) + 2^\mu(1 + 2^\mu) + 1$$

et

$$1 + 2^\mu + 3^\mu + 6^\mu + 2^{2\mu}(1 + 3^\mu) + 3^{2\mu}(1 + 2^\mu) + 6^{2\mu}.$$

Je trouve aussi l'équation

$$(\eta) \qquad \sum d^\mu \zeta_{3\mu}(\delta) = \sum d^\mu \zeta_{2\mu}(d),$$

qui, pour $m = 6$, exprime que

$$6^\mu + 3^\mu(1 + 2^{3\mu}) + 2^\mu(1 + 3^{3\mu}) + 1 + 2^{3\mu} + 3^{3\mu} + 6^{3\mu}$$

égale

$$6^\mu(1 + 2^{2\mu} + 3^{2\mu} + 6^{2\mu}) + 3^\mu(1 + 3^{2\mu}) + 2^\mu(1 + 2^{2\mu}) + 1.$$

Mais la formule que voici est surtout remarquable :

$$(\theta) \qquad \sum d^{\mu+\nu} \zeta_{\tau-\nu}(d) \zeta_\nu(\delta) = \sum d^\nu \zeta_\mu(d) \zeta_{\tau+\mu}(\delta).$$

Ainsi, pour $m = 4$, les deux quantités

$$4^{\mu+\nu}(1 + 2^{\tau-\nu} + 4^{\tau-\nu}) + 2^{\mu+\nu}(1 + 2^{\tau-\nu})(1 + 2^\nu) + 1 + 2^\nu + 4^\nu$$

et

$$4^{\nu}(1+2^{\mu}+4^{\mu})+2^{\nu}(1+2^{\mu})(1+2^{\tau+\mu})+1+2^{\tau+\mu}+4^{\tau+\mu}$$

doivent être égales, ce qui est exact.

On change aisément la formule (θ) en une autre, plus élégante encore peut-être,

$$(\iota)\qquad \sum d^{\mu}\zeta_{\nu+\tau}(d)\,\zeta_{\nu}(\delta)=\sum d^{\nu}\zeta_{\mu+\tau}(d)\,\zeta_{\mu}(\delta).$$

Cette nouvelle formule, dont la formule (θ) est à son tour une conséquence, peut d'ailleurs, elle aussi, s'établir directement. Pour cela, il faudra prouver que les deux sommes

$$\sum a^{\alpha'\mu}\left[1+a^{\nu+\tau}+a^{2(\nu+\tau)}+\ldots+a^{\alpha'(\nu+\tau)}\right]\left[1+a^{\nu}+a^{2\nu}+\ldots+a^{(\alpha-\alpha')\nu}\right]$$

et

$$\sum a^{\alpha'\nu}\left[1+a^{\mu+\tau}+a^{2(\mu+\tau)}+\ldots+a^{\alpha'(\mu+\tau)}\right]\left[1+a^{\mu}+a^{2\mu}+\ldots+a^{(\alpha-\alpha')\mu}\right]$$

ont la même valeur, α' variant dans l'une et dans l'autre de o à α.

Quand on y pose $\tau=0$, la formule (ι) devient

$$(\varkappa)\qquad \sum d^{\mu}\zeta_{\nu}(d)\,\zeta_{\nu}(\delta)=\sum d^{\nu}\zeta_{\mu}(d)\,\zeta_{\mu}(\delta),$$

et quoique plus restreinte, l'équation ($\varkappa$) offre encore un grand intérêt. On distingue surtout les cas particuliers que voici.

Pour $\mu=3$ et $\nu=1$, on a

$$(\lambda)\qquad \sum d^{3}\zeta_{1}(d)\,\zeta_{1}(\delta)=\sum d\zeta_{3}(d)\,\zeta_{3}(\delta);$$

pour $\mu=5$ et $\nu=1$,

$$(\mu)\qquad \sum d^{5}\zeta_{1}(d)\,\zeta_{1}(\delta)=\sum d\zeta_{5}(d)\,\zeta_{5}(\delta);$$

pour $\mu=5$ et $\nu=3$,

$$(\nu)\qquad \sum d^{5}\zeta_{3}(d)\,\zeta_{3}(\delta)=\sum d^{3}\zeta_{5}(d)\,\zeta_{5}(\delta);$$

pour $\mu = 3$ et $\nu = 0$,

$$(\xi) \qquad \sum d^3 \zeta(d) \zeta(\delta) = \sum \zeta_3(d) \zeta_3(\delta);$$

enfin, pour $\mu = 5$ et $\nu = 0$,

$$(o) \qquad \sum d^5 \zeta(d) \zeta(\delta) = \sum \zeta_5(d) \zeta_5(\delta).$$

On comprendra l'importance des formules que je viens d'écrire si je rappelle que $\zeta(m)$ désigne, pour un nombre m impair et n'ayant aucun facteur premier $4n+3$, le nombre des décompositions de $2m$ en une somme de deux carrés impairs, et que $\zeta_1(m)$ et $\zeta_3(m)$ expriment, pour un nombre impair quelconque, le nombre des décompositions de $4m$ en une somme de quatre carrés impairs et de $8m$ en une somme de huit carrés impairs; mode d'interprétation que j'étendrai plus tard, avec des changements convenables, à $\zeta_5(m)$, $\zeta_7(m)$, etc. De là découleront, en vertu de nos formules, de nombreux théorèmes dont on peut se faire une idée par celui que j'ai déjà donné au cahier d'octobre, page 351, et qui répond à la formule

$$\sum \int d \int \delta = \sum d \zeta(d) \zeta(\delta).$$

Présentons maintenant une formule où figurent à la fois une sommation relative aux seuls diviseurs carrés D^2 de m et une sommation relative à tous les diviseurs d. On a

$$(\pi) \qquad \sum \lambda(d) \zeta_\mu(\delta) = \sum{}' \left(\frac{m}{D^2}\right)^\mu.$$

Ainsi, pour $m = 4$, il faut que

$$1 + 2^\mu + 4^\mu - (1 + 2^\mu) + 1 = 4^\mu + 1,$$

ce qui est exact.

Jusqu'ici, μ, ν, τ ont désigné des quantités quelconques, entières ou non, positives ou négatives. Mais μ doit être un entier positif dans la

formule que voici :

$$(\rho) \qquad \sum \zeta(d^{2\mu})\,\zeta_\nu(\delta) = \sum d^\nu\,\zeta(\delta)\,\zeta(\delta^\mu).$$

Pour $m = 6$, la formule (ρ) marque l'égalité des deux expressions

$$(1+2\mu)^2 + (1+2\mu)(1+2^\nu) + (1+2\mu)(1+3^\nu) + 1 + 2^\nu + 3^\nu + 6^\nu,$$

et

$$6^\nu + 3^\nu.2(1+\mu) + 2^\nu.2(1+\mu) + 4(1+\mu)^2.$$

La condition de μ entier positif devra également être remplie dans la formule

$$(\sigma) \qquad \sum \theta(d)^\nu\,\zeta_\mu(\delta) = \sum d^\mu\,\zeta\left(\delta^{2\nu}\right),$$

dont la formule (γ) n'est qu'un cas particulier, et par laquelle je terminerai cet article : elle donne, pour $m = 3$, l'équation

$$\theta(1)^\nu\,\zeta_\mu(3) + \theta(3)^\nu\,\zeta_\mu(1) = 3^\mu\,\zeta(1) + \zeta\left(3^{2\nu}\right),$$

c'est-à-dire l'identité

$$1 + 3^\mu + 2^\nu = 3^\mu + 2^\nu + 1.$$

SUR QUELQUES SÉRIES ET PRODUITS INFINIS;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Il est assez curieux que les deux séries

$$\frac{\varphi(1)x}{1-x}+\frac{\varphi(2)x^2}{1-x^2}+\frac{\varphi(3)x^3}{1-x^3}+\ldots$$

et

$$\frac{\varphi(1)x}{1+x}+\frac{\varphi(2)x^2}{1+x^2}+\frac{\varphi(3)x^3}{1+x^3}+\ldots,$$

où $\varphi(m)$ marque généralement combien il y a de nombres premiers à m dans la suite $1, 2, 3, \ldots, m$, aient des valeurs tres-simples. En se servant, pour abréger, du signe $\sum$, on trouve en effet

$$(1)\qquad \sum\frac{\varphi(m)x^m}{1-x^m}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

et

$$(2)\qquad \sum\frac{\varphi(m)x^m}{1+x^m}=\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

Nous supposons, bien entendu, que la valeur numérique de x (ou le module de x, si x est imaginaire) reste <1, sans quoi nos séries ne seraient pas convergentes.

Pour démontrer l'équation (1), observons qu'en développant

$$\frac{1}{1-x^m}$$

sous la forme

$$x^m+x^{2m}+x^{3m}+\ldots,$$

on peut écrire son premier membre ainsi qu'il suit :

$$x\varphi(1)+x^2[\varphi(1)+\varphi(2)]+\ldots+x^n[\varphi(1)+\varphi(d)+\ldots+\varphi(n)]+\ldots,$$

$1, d, \ldots, n$ étant les diviseurs de n. Or

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \ldots + \varphi(n) = n,$$

d'après un théorème de Gauss. Il vient donc

$$\sum \frac{\varphi(m)\, x^m}{1 - x^m} = x + 2x^2 + \ldots + nx^n + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

C'est la formule (1).

Quant à la formule (2), elle se déduit de l'équation (1) en en retranchant le double de celle que cette équation (1) donne quand on y remplace x par x^2.

On peut aussi sommer aisément la série

$$\sum{}' \frac{\varphi(m)\, x^m}{1 - x^{2m}},$$

où je ne donne plus à m que les valeurs impaires 1, 3, 5, 7,..., tandis que tout à l'heure m était indifféremment pair ou impair. En développant en effet

$$\frac{1}{1 - x^{2m}},$$

et en appliquant encore le théorème de Gauss, il vient

$$\sum{}' \frac{\varphi(m)\, x^m}{1 - x^{2m}} = x + 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + \ldots.$$

Donc

$$(3) \qquad \sum{}' \frac{\varphi(m)\, x^m}{1 - x^{2m}} = \frac{x(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}.$$

On conclut des formules (2) et (3) que les deux séries

$$\sum \frac{\varphi(m)\, x^m}{1 + x^m}$$

et

$$\sum{}' \frac{\varphi(m)\, x^m}{1 - x^{2m}}$$

sont égales entre elles.

2. On pourrait ajouter aux séries déterminées par les formules (1), (2), (3) d'autres séries qui s'en déduisent, soit par la différentiation, soit par des transformations algébriques. Mais c'est surtout en les intégrant qu'on est conduit à des résultats curieux.

La formule (1) multipliée par $\frac{dx}{x}$ et intégrée donne par exemple

$$\sum \frac{\varphi(m)}{m} \log(1 - x^m) = -\frac{x}{1-x}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{\varphi(m)}{m} = \mu,$$

et passons des logarithmes aux nombres. Nous obtiendrons

$$(4) \qquad \Pi(1 - x^m)^\mu = e^{-\frac{x}{1-x}},$$

ou bien encore

$$(5) \qquad \Pi \frac{1}{(1 - x^m)^\mu} = e^{\frac{x}{1-x}}.$$

Le signe Π est le signe de multiplication. Il s'applique aux valeurs 1, 2, 3, 4, 5,... de m et aux valeurs correspondantes $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \ldots$ de μ. Les facteurs sont les mêmes que dans le produit infini

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots(1 - x^m)\ldots,$$

ou

$$\Pi(1 - x^m),$$

qu'Euler a développé, comme on sait, en une série ordonnée suivant les puissances de x; mais les exposants sont tous égaux à l'unité dans la série d'Euler, tandis que dans nos formules l'exposant de $1 - x^m$ est égal à μ ou à $-\mu$, ce qui, par le fait, ne rend que plus simples les valeurs de nos produits. Je n'ai pas besoin d'ajouter que l'exponentielle

$$e^{\pm\frac{x}{1-x}}$$

est aisée à développer en série suivant les puissances de x. En effet, on a d'abord

$$e^{\pm\frac{x}{1-x}} = 1 \pm \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1.2(1-x)^2} \pm \frac{x^3}{1.2.3(1-x)^3} + \ldots;$$

ensuite on développera les dénominateurs au moyen de la formule du binôme

$$\frac{1}{(1-x)^s} = 1 + \frac{s}{1}x + \frac{s(s+1)}{1.2}x^2 + \ldots.$$

Il ne restera plus après cela qu'à faire pour chaque puissance x^n la somme des coefficients, ce qui ne donnera qu'une suite limitée, puisqu'on ne devra aller que jusqu'à $s = n$. Soit

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots$$

le développement cherché; on trouvera

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \pm 1, \quad C_2 = \pm 1 + \frac{1}{2}, \quad C_3 = \pm 1 + 1 \pm \frac{1}{6},$$

et en général

$$C_n = \pm 1 + \frac{n-1}{1.2} \pm \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-2)} + \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n};$$

la loi des signes dans cette expression de C_n est évidente, et la valeur absolue du terme de rang s est

$$\frac{(s+1)(s+2)\ldots(n-1)}{1.2\ldots(s-1).1.2\ldots(n-s)}.$$

Après avoir ainsi développé les seconds membres des formules (4) et (5), on pourrait de même chercher le coefficient de x^n dans les développements directement effectués de leurs premiers membres, et l'on aurait, en comparant les deux résultats, des théorèmes concernant les exposants μ ou plutôt les fonctions $\varphi(m)$.

On arriverait à d'autres résultats du même genre en intégrant les formules (2) et (3). Les résultats fournis par la formule (2) seraient, pour le produit

$$\Pi \frac{1}{(1+x^m)^\mu},$$

les analogues de ceux que nous venons d'obtenir pour le produit

$$\Pi \frac{1}{(1-x^m)^\mu}.$$

5. J'indiquerai encore une application de nos formules à la théorie des nombres.

L'équation

$$\sum \frac{\varphi(m)\,x^m}{1+x^m} = \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = x + 3x^3 + 5x^5 + \ldots$$

nous montre qu'en développant l'expression

$$\sum \frac{\varphi(m)\,x^m}{1+x^m}$$

suivant les puissances ascendantes de x, on doit trouver o pour la valeur du coefficient de toute puissance paire de x. Or on a

$$\frac{1}{1+x^m} = 1 - x^m + x^{2m} - x^{3m} + \ldots,$$

et il s'ensuit aisément que si l'on désigne par d un diviseur quelconque de n, et par δ le diviseur conjugué qui donne $n = d.\delta$, l'expression du coefficient de x^n dans le développement de

$$\sum \frac{\varphi(m)\,x^m}{1+x^m}$$

est

$$\sum (-1)^{\delta-1}\varphi(d),$$

le signe $\sum$ s'appliquant ici à tous les diviseurs d de n, 1 et n compris. Si donc nous supposons n pair, nous aurons

$$\sum (-1)^{\delta-1}\varphi(d) = 0.$$

L'équation que je viens d'écrire résulte du reste, comme cas très-particulier, d'un théorème que nous avons démontré dans un des articles qui précèdent. On a pu voir que si, pour tout entier $n = d\delta$, on a

$$\sum f(d) = F(n),$$

f et F étant deux fonctions numériques déterminées, il s'ensuit, pour n pair,

$$\sum(-1)^{\delta-1} f(d) = \mathrm{F}(n) - 2\mathrm{F}\left(\frac{n}{2}\right).$$

Prenez $f(n) = \varphi(n)$, et par suite $\mathrm{F}(n) = n$, d'après le théorème de Gauss, et vous en conclurez, pour n pair,

$$\sum(-1)^{\delta-1} f(d) = n - 2\frac{n}{2} = 0,$$

comme ci-dessus.

Distinguons les valeurs impaires de δ des valeurs paires en représentant l'une quelconque des valeurs impaires par δ_1 et l'une quelconque des valeurs paires par δ_2. Alors nous aurons, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$\sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) = \sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_2}\right).$$

Mais déjà, en vertu du théorème cité de Gauss,

$$\sum\varphi\left(\frac{n}{\delta}\right) = \sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) + \sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_2}\right) = n.$$

Donc, séparément,

$$\sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) = \frac{n}{2}$$

et

$$\sum\varphi\left(\frac{n}{\delta_2}\right) = \frac{n}{2}.$$

Ces dernières formules sont, au reste, bien aisées à établir directement. Comme elles sont une conséquence immédiate l'une de l'autre, il suffit d'établir la première. Soit, à cet effet,

$$n = 2^{\alpha}.q,$$

q étant un nombre impair. Les diviseurs impairs δ_1 de n seront précisément les diviseurs de q. On aura d'ailleurs, par une propriété bien connue de la fonction φ,

$$\varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) = \varphi\left(2^{\alpha}.\frac{q}{\delta_1}\right) = \varphi(2^{\alpha})\,\varphi\left(\frac{q}{\delta_1}\right) = 2^{\alpha-1}\,\varphi\left(\frac{q}{\delta_1}\right).$$

d'où

$$\sum \varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) = 2^{\alpha-1} \sum \varphi\left(\frac{q}{\delta_1}\right).$$

Mais δ_1 désignant un diviseur quelconque de q, son conjugué, qui est quelconque aussi, est $\frac{q}{\delta_1}$, et l'on a

$$\sum \varphi\left(\frac{q}{\delta_1}\right) = \sum \varphi(\delta_1) = q.$$

Donc

$$\sum \varphi\left(\frac{n}{\delta_1}\right) = 2^{\alpha-1}.\, q = \frac{n}{2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Le théorème de Gauss dont nous venons de nous servir s'applique également à la série

$$\frac{\varphi(1)}{1^s} + \frac{\varphi(2)}{2^s} + \frac{\varphi(3)}{3^s} + \ldots + \frac{\varphi(n)}{n^s} + \ldots,$$

que je représenterai, pour abréger, par

$$\sum \frac{\varphi(n)}{n^s},$$

en exprimant de même par

$$\sum \frac{1}{n^s}$$

la suite

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots,$$

des puissances de degré négatif des nombres naturels. Je suppose $s > 2$, afin que la série

$$\sum \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

soit convergente.

Cela posé, considérons le produit

$$\sum \frac{1}{n^s} \sum \frac{\varphi(n)}{n^s},$$

et pour l'effectuer plus aisément, remplaçons n par δ dans la première série et par d dans la seconde; le terme général du produit dont il s'agit sera

$$\frac{\varphi(d)}{(d\delta)^s},$$

et en réunissant tous les termes où $d\delta$ conserve une même valeur n, on aura

$$\frac{\varphi(1)+\varphi(d)+\ldots+\varphi(n)}{n^s},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n^{s-1}},$$

d'après le théorème de Gauss.

On a donc

$$\sum\frac{1}{n^s}\sum\frac{\varphi(n)}{n^s}=\sum\frac{1}{n^{s-1}},$$

d'où

$$\sum\frac{\varphi(n)}{n^s}=\sum\frac{1}{n^{s-1}}:\sum\frac{1}{n^s}.$$

On pourrait pousser plus loin ces détails; mais je m'arrête, en faisant observer pourtant que les considérations précédentes s'étendent à toutes les formules que j'ai obtenues dans mes recherches sur diverses fonctions numériques : je reviendrai donc plus tard sur ce sujet.

FIN DU TOME DEUXIÈME (2e SÉRIE).

QA
1
J684
sér.2
t.2
Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY